Calcul du déterminant de Vandermonde

Propriété 1 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. *On définit le déterminant de Vandermonde* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *comme le déterminant* $\det\Big((x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big)$. *On a alors la formule :*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Méthode 1 : opérations sur les colonnes.
On procède par récurrence sur n.

Initialisation : Pour $n = 2$, on a $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$ donc la formule est vraie dans ce cas.

Hérédité : Supposon la formule vraie à l'ordre n et calculons $V(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Pour cela, effectuons les opérations $C_i \leftarrow C_i - x_1 C_{i-1}$ pour $i = n+1$, $i = n$,..., $i = 2$, de sorte que

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_1) V(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

la dernière ligne étant obtenue en factorisant $(x_{i+1} - x_1)$ dans L_i. Par hypothèse de récurrence on a

$$V(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$$

$$\text{d'où} \quad V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_1) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$$

puisque la contribution pour $i = 1$ dans le produit ci-dessus correspond exactement au terme $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_1)$. La propriété est donc établie pour $n + 1$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

$\square$

Méthode 2 : Exploitation du caractère polynomial.
On procède ici aussi par récurrence. L'initialisation pour $n = 2$ se fait de la même manière que dans la méthode 1 ; pour l'hérédité, fixons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et étudions la fonction $P : x \mapsto V(x_1, \dots, x_n, x)$. Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant $V(x_1, \dots, x_{n+1})$ est nul puisqu'il possède deux lignes identiques, et la formule à démontrer est évidente : on supposera donc que $x_i \neq x_j$ pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Développons le déterminant $P(x)$ selon sa dernière ligne,

$$\forall x \in \mathbb{C} \qquad P(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \Delta_j x^{j-1}$$

où Δ_j est le déterminant obtenu en supprimant la j-e colonne et la $(n+1)$-e ligne de $P(x)$. Bien qu'ils dépendent de $x_1, \dots, x_n$, les Δ_j sont indépendants de x ; la fonction P est donc polynomiale de degré au plus n et possède n racines distinctes $x_1, \dots, x_n$ ($P(x) = 0$ lorsque $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ en tant que déterminant avec deux lignes identiques). Mais alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K} \qquad P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

où λ est le coefficient dominant de P. L'expression obtenue lors du développement selon la dernière ligne montre que $\lambda = \Delta_{n+1} = V(x_1, \dots, x_n)$. L'hypothèse de récurrence assure donc que

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = P(x_{n+1}) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \right) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)$$

$\square$