Définition 1

On appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. pour tout $A \in \mathscr{A}$, le complémentaire de A est dans la tribu : $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$
3. Pour tout suite $(A_n)_n$ d'élements de $\mathscr{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est dans $\mathscr{A}$.

   On appelle Ω l'**univers** et les élements de la tribu $\mathscr{A}$ les **événements**.

Définition 2

On appelle **système complet (dénombrable) d'événements** toute suite $(A_n)_n$ d'événements tq

1. Les événements A_n sont deux à deux incompatibles
2. $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$

Définition 3

On dit que la suite d'événements (A_n) forme un **système quasi-complet d'événements** si

1. Les événements A_n sont deux à deux incompatibles
2. $\displaystyle P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$

Définition 4

Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

— $P(\Omega) = 1$

— σ-additivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles 2 à 2, la série $\sum P(A_n)$ est convergente et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

$\mathcal{P}$ropriété 5

1. Croissance : pour A, B dans $\mathscr{A}$ tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
2. Continuité croissante : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements ($\forall n \quad A_n \subset A_{n+1}$), alors
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$
3. Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements ($\forall n \quad A_{n+1} \subset A_n$),
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$
4. Sous-σ-additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \, (= +\infty \text{ si la série diverge})$$

Définition 6 (*/propriété*)

Soit B un événement non négligeable,
Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on appelle **probabilité conditonnelle** de A sachant B le réel noté $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ défini par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On ajoute la convention $P_B(A) \times P(B) = 0$ si $P(B) = 0$
L'application $P_B : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{A} \to [0,1] \\ A \mapsto P_B(A) \end{array} \right.$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, appelée **probabilité conditionnelle** sachant B.

Théorème 7 (*Formule des probabilités composées*)

Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ telles que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème 8 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un **système complet (dénombrable) d'événements** ou un **système quasi complet d'événements**, alors pour tout $B \in \mathscr{A}$, la série $\sum P_{A_n}(B)P(A_n) = \sum P(B \cap A_n)$ converge,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$$

Théorème 9 (*Formule de Bayes*)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un **système complet (dénombrable) d'événements** ou un **système quasi complet d'événements** et $B \in \mathscr{A}$ un événement tel que $P(B) > 0$, alors

1. Pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $P(A) > 0$, $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$
2. $\forall j \in \mathbb{N}, P_B(A_j) = \dfrac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}$
   Avec la convention $P_{A_i}(B) \times P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$

Théorème 10

Si Ω est au plus dénombrable et si $p : \Omega \to [0,1]$ vérifie $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ telle que $P(\{\omega\}) = p(\omega)$. P est définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\, \mathbb{1}_A(\omega).$$