TD n° 1 - Suites et séries, introduction à la convergence simple

---

Exercice 1. Étudier la nature et calculer la somme des séries $\sum u_n$ suivantes lorsqu'elles convergent :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $(*)$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^2}$
4. $(*)$ $u_k = \dfrac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$
5. $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$
6. $(\star)$ $u_n = (-1)^n \ln(\dfrac{n+1}{n-1})$ (converge-t-elle absolument ?)

Exercice 2. $(*)$ Dire sur quel intervalle et vers quelle fonction les suites et séries de fonctions suivantes convergent simplement :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto x^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^k$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto nx^n \ln(x)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto e^{\frac{(n-1)x}{n}}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$

Exercice 3. $(*)$ Dire pour quelles valeurs de x les séries de fonctions $\sum f_n$ suivantes convergent simplement.

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$
2. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}$
3. $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$ avec $a \in \mathbb{R}$
4. $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$

Exercice 4. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur l'intervalle I. Dire si les phrases suivantes sont vraie ou fausse et le démontrer ou donner un contre-exemple.

1. Si les (f_n) sont croissantes sur I, alors f est croissante sur I.
2. Si les (f_n) sont strictement croissantes sur I, alors f est strictement croissante sur I.
3. Si les (f_n) sont T-périodiques sur $I = \mathbb{R}$, alors f est T-périodiques sur I.
4. Si les (f_n) sont continues en $a \in I$, alors f est continue en $a \in I$.

$(*)$: exercice d'application
$(\star)$: exercice à faire par les 5/2