Exercice 1 - Base+coordonnées

Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$.

Exercice 2 - Complétion d'une base

Pour $E = \mathbb{R}^4$, dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de E. Si oui, le faire.

1. (u,v,w) avec $u = (1,2,-1,0)$, $v = (0,1,-4,1)$ et $w = (2,5,-6,1)$;
2. (u,v,w) avec $u = (1,0,2,3)$, $v = (0,1,2,3)$ et $w = (1,2,0,3)$;
3. (u,v) avec $u = (1,-1,1,-1)$ et $v = (1,1,1,1)$.

Exercice 3 - Bases de sous-espaces vectoriels - 1

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée en 1 et des vecteurs de la base de G trouvée en 2. est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires?

Exercice 4 - Supplémentaire

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$,
$G = \text{vect}\{(1,-2,1,1), (1,2,-3,1), (5,-3,-2,5)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 5 - Exercice de synthèse

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre?

4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G?

5. Donner une base de $F \cap G$.

6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G?

Exercice 6 - Suites arithmétiques

Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension?

Exercice 7 - Noyau et image

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.

3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 8 - Application linéaire donnée par l'image d'une base

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ , u(e_2) = 3e_2\ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de ker u. u est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?

2. Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?

3. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

Exercice 9 - Définie par une base

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Exercice 10 - Applications linéaires dans un espace de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 11 - AL-0

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 12 - Donnée par une matrice

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13 - Changement de base

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases?

Exercice 14 - Surjective?

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 15 - Application linéaire définie sur les matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille par l'url :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=14290