# II Topologie des evn

## 1 Ouverts, fermés

**Définition 1**

Soit $A$ une partie de $E$, et $a \in A$.
On dit que $a$ est un **point intérieur** à $A$ s'il existe une boule ouverte de centre $a$ incluse dans $A$ :

$$\exists r > 0, B(a, r) \subset A$$

**Définition 2**

Une partie $\mathcal{O}$ de $E$ est dite **ouverte** si tous ses éléments sont des points intérieurs :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{O}$$

**Exemple 3**

**Propriété 4**

Toute union d'ouverts et un ouvert, toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

**Exemple 5**

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]0, 1 + \frac{1}{n+1}[ =$$

**Remarque 6**

On retient que les unions et intersections finies d'ouverts sont des ensembles ouverts.

**Définition 7**

Soit $A \subset E$ et $x \in E$,
On dit que $x$ est un point **adhérent** à $A$ lorsque toute boule ouverte centrée en $x$ rencontre $A$ :

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

**Exemple 8**

**Définition 9**

Une partie $F \subset E$ est dite **fermée** si tous ses élements sont adhérents à $F$ :

$$\forall x \in F, \forall r > 0, B(x, r) \cap F \neq \emptyset$$

**Exemple 10**

**$\mathcal{P}$ropriété 11**

Toute intersection de fermés est un fermé, toute union **finie** de fermés est un fermé

**Exemple 12**

$\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \dfrac{1}{n+1}] =$

**Remarque 13**

On retient que les unions et intersections finies de fermés sont des ensembles fermés.

**Remarque 14**

Les notions d'ouvert et de fermé dépendent du choix de la norme, sauf en dimension finie (car les normes sont équivalentes).
Il existe des ensembles qui sont ouverts et fermés à la fois
en revanche beaucoup d'ensembles ne sont ni l'un ni l'autre, comme

**Propriété 15**

Les boules ouvertes sont des ouverts ;
es boules fermées sont des fermés ;
les sphères sont des fermés.

**Remarque 16**

En particulier, cela est vrai pour les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des boules plates.

**Théorème 17**

Une partie est ouverte <u>ssi</u> son complémentaire est fermé.

## 2 Intérieur, adhérence, frontière

**Définition 18**

Soit $A \subset E$, l'ensemble des points intérieurs à $A$ est noté $\mathring{A}$ et s'appelle **l'intérieur** de la partie $A$.

**Exemple 19**

L'intérieur de $]1, 2]$ est

**Propriété 20**

L'intérieur d'une partie est un ouvert (c'est le plus grand ouvert inclu dans la partie).

**Corollaire 21**

Une partie est ouverte <u>ssi</u> elle est égale à son intérieur.

**Définition 22**

Soit $A \subset E$, l'ensemble des points adhérent à $A$ est noté $\overline{A}$ et s'appelle **l'adhérence** de la partie $A$/

**Exemple 23**

L'adhérence de $]1, 2]$ est

**Propriété 24**

L'adhérence d'une partie est un fermé (c'est le plus petit fermé qui contient la partie).

**Corollaire 25**

Une partie est fermée <u>ssi</u> elle est égale à son adhérence.

**Remarque 26**

On a les inclusions $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

**Définition 27**

On appelle **frontière** d'une partie $A$ l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

**Exemple 28**

La frontière de $]1, 2]$ est

**Exemple 29**

Montrer que le complémentaire de l'adhérence d'une partie de $E$ est l'intérieur du complémentaire de cette partie :