I Rappel des théorèmes d'analyse de sup

Théorème 1 (*des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors
$\forall a, b \in I$, avec $a < b$, et pour tout point $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $y \in [f(b), f(a)]$ selon la monotonie de f),
il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$

Théorème 2 (*de la bijection monotone*)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.
Alors, f réalise une bijection de I sur son image $J = f(I)$ qui est un intervalle.
De plus sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone de même monotonie que f.

Théorème 3 (*de Rolle*)

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4 (*Égalité des accroissements finis*)

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Théorème 5 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit f **dérivable** sur I un intervalle.
S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x de I on a $|f'(x)| \leq k$ alors
la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

Théorème 6 (*de la limite de la dérivée*)

Soit f **continue** sur un intervalle I et soit $a \in I$.
Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Théorème 7 (*Fondamental de l'analyse*)

Soit f **continue** sur I alors
f possède une primitive F qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et

$$\forall a, b \in I \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Théorème 8 (*Formule de Taylor-Young*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^n(V)$ avec $a \in V$. (V est un voisinage de a)
Alors f admet un DL à l'ordre n en a dont les coefficients sont :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)
\end{aligned}
$$

Théorème 9 (*Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral*)

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$, alors

$$
f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt
$$

Théorème 10 (*Inégalité Taylor-Lagrange*)

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$, alors

$$
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} \left(\left| f^{(n+1)} \right| (x) \right)
$$

II Propriétés de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

Soit $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{K})$ deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ la valeur de l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$.

Propriété 11 (*Linéarité de l'intégrale*)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

Propriété 12 (*Relation de Chasles*)

Soit $c \in [a,b]$, alors les restricitons à $[a,c]$ et $[c,b]$ de f sont aussi continues par morceaux et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Propriété 13 (*Positivité de l'intégrale*)

Si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\int_a^b f \geq 0$$

Propriété 14 (*Stricte positivité de l'intégrale*)

Si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \in \mathbb{R}_+$, et qu'il existe un segment $[c,d] \subset [a,b]$ tel que $\forall x \in [c,d],\ f(x) > 0$, alors

$$\int_a^b f > 0$$

Propriété 15 (*Croissance de l'intégrale*)

Si f et g sont à valeurs réelles et $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Propriété 16 (*Inégalité triangulaire*)

La fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Remarque 17

On en déduit l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty$$

Propriété 18

Si $f(x) = g(x)$ pour tout x de $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Propriété 19 (*Corollaire de la stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue*)

Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue**, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ et

$$\int_a^b f = 0 \Leftrightarrow f = 0_{\mathscr{C}^0([a,b])}$$

Remarque 20

Si f est seulement continue par morceaux, l'équivalente précédente est fausse. Elle devient $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si et seulement si f est nulle sauf en un nombre fini de points.

Propriété 21 (*Intégration par parties*)

Si $f, g \in \mathscr{C}^1([a, b])$, alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 22

Comme f et g doivent être dérivables (et même de dérivée continue) pour que les intégrales de cette propriété aient un sens, elles sont continues, donc plus que continues par morceaux.

Propriété 23 (*Changement de variable cas continue*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$ **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\varphi \in \mathscr{C}^1([c, d], I)$ alors

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Propriété 24 (*Changement de variable cas continue par morceaux*)

Soit f **continue par morceaux** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\varphi \in \mathscr{C}^1([c, d], I)$ qui est **strictement monotone** alors

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$