III Existence des bon

Théorème 1

Soit E un espace euclidien, alors pour toute famille libre $\mathscr{X} = \{x_1, \dots, x_p\}$, il existe une unique famille orthonormale $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$ telle que

1. pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $Vect(x_1, \dots, x_k) = Vect(e_1, \dots e_k)$
2. pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\langle x_k \mid e_k \rangle > 0$

Rappel : La preuve est constructive

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $e_k = \dfrac{1}{\|\varepsilon_k\|}\varepsilon_k$ où $\varepsilon_k = x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j \mid x_k \rangle e_j$

i.e. $\varepsilon_k = x_k - p_{F_{k-1}}(x_k)$ avec $F_k = Vect(e_1, \dots, e_k)$ et on reconnait l'expression du projecteur orthogonal dans une base

Exemple 2

Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$

Remarque 3

Cela a-t-il du sens d'orthonormaliser une famille infinie ? C'est un processus algorithmique récursif, on sait que son orthonomalisée existe, et qu'on peut la calculer à tout ordre de proche en proche.
On peut parler de suite de polynômes orthogonaux, et on peut au moins exprimer les premiers en les calculant.
L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ par le produit scalaire de l'exemple précédent est une famille de polynôme appelés les polynôme de Legendre.
On peut aussi les definir par récurrence, ou encore comme solution d'une équation différentielle, ou même comme les valeurs propres de l'endomorphisme $P \mapsto \left((1-x^2)P'\right)'$, ou finalement par la fomule de Rodriques $P_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n!}\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]$.

Corollaire 4

Tout espace euclidien admet une BON.

Application :

Remarque 5

Tous les théorèmes d'existence de base (incomplète, adaptée, ...) auquels on applique ensuite le procédé de Gram-Schmidt deviennent des théorèmes d'existence de base orthonormée.

Théorème 6 (*décomposition QR d'une matrice inversible*)

Soit $a \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que

1. $A = QR$
2. Q est inversible avec $Q^{-1} =^t Q$ (on dit que Q est une matrice orthogonale, cf plus tard)
3. R est triangulaire supérieur