Équations différentielles scalaires

Pré-requis de ce chapitre : les méthodes pour trouver une primitive d'une fonction sur un intervalle.
On cherche des solutions à des équations différentielles qui sont des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 1

Soit $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ deux fonctions **continues** de I dans $\mathbb{K}$.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation d'inconnue la fonction $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ de la forme

$$(E) : y' + a(x)y = b(x).$$

On appelle alors **équation différentielle homogène associée** à (E), l'équation

$$(E_H) : y' + a(x)y = 0$$

Définition 2

On dit que la fonction f est **solution** de l'équation différentielle $(E) = y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle I si

$$f \in \mathscr{C}^1(I) \quad \text{et} \quad \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

1 Trouver les solutions des équations différentielles homogènes linéaires d'ordre 1

Théorème 3

Soit $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_H) : y' + a(x)y = 0$ sur l'intervalle I est

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Remarque 4

On peut aussi dire :
Les solutions de l'équation homogène $(E_H) : y' + a(x)y = 0$ sur l'intervalle I sont de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Exemple 5

Trouver les solutions de l'équation homogène $(1 - x)y' + y = 0$.

$$(1 - x)y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{1 - x}y = 0$$

La fonction $a : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$ est continue sur $I_1 = [-\infty, 1[$ et sur $I_2 =]1, \infty]$, on peut donc appliquer le théorème à chacun de ces intervalles.
Sur I_1 :
Les solutions sont de la forme $y : x \mapsto= \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A : x \mapsto -\ln(|1 - x|) = -\ln(1 - x)$ une

primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-\infty, 1[$, l'ensemble des solutions à l'équation sur I_1 est donc

$$\{y : x \mapsto \lambda(1-x), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

De même sur I_2 les solutions sont de la forme

$$y : x \mapsto \mu(x-1), \mu \in \mathbb{R}.$$

Existe-t-il une solution à cette équation sur définie sur $\mathbb{R}$?
Répondre à cette question s'appelle **"recoller"** les solutions de l'équation.

Par le travail fait précédemment, si une telle solution $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ existe, alors elle est de la forme

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \lambda(1-x) \text{ si } x < 1 \\ \mu(x-1) \text{ si } x > 1 \\ \gamma \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$$

• Si une telle fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ existe, alors elle est continue en 1 et
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(0) = \gamma$, donc $\gamma = 0$.
• Pour qu'elle soit $\mathscr{C}^1$, la dérivée doit aussi être continue en 1 et
$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\lambda = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \mu$ donc $\lambda = -\mu$.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \lambda(1-x)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1-x)f'(x) + f(x) = 0$, c'est donc une solution de l'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}$

Remarque 6

Il n'est pas toujours possible de recoller les solutions.
Intéressons nous à l'équation différentielle $(E) : (1-x)y' - y = 0$.
Sur I_1, une primitive de $a : x \mapsto -\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$ est $A : x \mapsto \ln(|x-1|) = \ln(1-x)$ et les solutions de l'équation sont de la forme

$$y_1 : x \mapsto \lambda e^{-ln(1-x)} = \lambda \frac{1}{e^{ln(1-x)}} = \frac{\lambda}{1-x}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

et de même sur I_2, les solutions sont de la forme

$$y_2 : x \mapsto \mu e^{-ln(x-1)} = \frac{\mu}{x-1}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

et une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-x} \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\mu}{x-1} \text{ si } x > 1 \\ \gamma \text{ si } x = 1 \end{cases}$ ne peut pas être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle n'est même pas continue en 1 :
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Exercice 7

Donner les solutions sur le ou les plus grands intervalles possibles des équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y' - 2xy = 0$$

$$(E_2) : (1+x)y' + y = 0$$

2 Trouver les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

Théorème 8

Les solutions de l'équation avec second membre $y' + a(x)y = b(x)$ s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

MÉTHODE : pour trouver une solution particulière on utiliser la méthode de la variation de la constante. Si $y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation homogène associée sur I, on note

$$y_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}, \text{ avec } \lambda \in \mathscr{C}^1(I)$$

une solution particulière de l'équation avec second membre.
On réinjecte cette solution particulière dans (E) ce qui nous donne λ' puis en primitivant on trouve la fonction λ et donc la fonction y_p.

Remarque 9

Attention à l'erreur classique : la solution particulière n'est pas λ mais bien y_p.

Exemple 10

Trouver sur $I_2 =]1, +\infty[$ les solutions de l'équation différentielle avec second membre

$$(E) : (1-x)y' + y = 2x$$

Comme vu dans l'exemple 5, les solutions sur $\mathbb{R}$ donc sur I_2 de l'équation homogène associée sont de la forme $y : x \mapsto \lambda(1-x), \lambda \in \mathbb{R}$.
On note $y_p : x \mapsto \lambda(x)(1-x)$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(I_2)$ et on cherche une solution particulière de (E) de cette forme.
On injecte y_p dans (E) : soit $x \in I_2$

$$(1-x)\left[\lambda'(x)(1-x) - \lambda(x)\right] + \lambda(x)(1-x) = (1-x^2)\lambda'(x) = 2x$$

Donc

$$\lambda'(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{2x-2}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^2} = 2\frac{1}{x-1} + 2\frac{1}{(1-x)^2}$$

soit $\lambda(x) = 2\ln(x-1) + 2\dfrac{1}{1-x}$ convient.
Ainsi

$$y_p : x \mapsto (2\ln(x-1) + 2\frac{1}{1-x})(1-x) = 2(1-x)\ln(x-1) + 2$$

est une solution particulière de (E).
Pour conclure, les solutions de (E) sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda(1-x) + 2(1-x)\ln(x-1) + 2, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11

Résoudre sur l'intervalle précisé les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y' - 2xy = -(2x-1)e^x \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$(E_2) : (1+x)y' + y = 1 + \ln(x) \text{ sur }]-1, +\infty[$$

3 Problème de Cauchy

Définition 12

Soit $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Le système $\left\{ \begin{array}{l} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$ est appelé un **problème de Cauchy**,et l'égalité $y(x_0) = y_0$ est appelée **condition initiale**.

Théorème 13

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

MÉTHODE : pour résoudre un problème de Cauchy :
On résout comme vu au dessus l'équation différentielle, et l'ensemble des solutions dépend d'un paramètre λ.
En réinjectant la forme des solutions en l'égalité $y(x_0) = y_0$, cela permet de trouver la valeur de λ et donc l'unique solution.

Exemple 14

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $I_2 =]1, +\infty[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-x)y' + y = 2x \\ y(2) = 0 \end{array} \right.$$

Dans l'exemple 10 nous avons vu que les solutions à $(1-x)y' + y = 2x$ sur I_2 sont de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda(1-x) + 2(1-x)\ln(x-1) + 2, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit y une telle solution, alors
$y(2) = \lambda(1-2) + 2(1-2)\ln(2-1) + 2 = -\lambda + 2$
dont $y(2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$
Ainsi, l'unique solution au problème de Cauchy est

$$y : x \mapsto 2\left[(1-x) + (1-x)\ln(x-1) + 1\right]$$

Exercice 15

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} ty' - 2y = t^3 \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$$

II Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 16

Soit $c \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in \mathbb{K}$.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** une équation d'inconnue la fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ de la forme

$$(E) : y'' + ay' + by = c(x)$$

On appelle alors **équation différentielle homogène associée** à (E) l'équation

$$(E_H) : y'' + ay' + by = 0$$

Définition 17

On dit que la fonction f est **solution** de l'équation différentielle $(E) = y'' + ay' + by = c(x)$ sur l'intervalle I si
$$f \in \mathscr{C}^2(I) \ \text{ et } \ \forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x)$$

Remarque 18

Si $b = 0$, on retrouve une équation différentielle d'ordre 1 d'inconnue y' puis on intègre la solution.

1 Trouver les solutions des équations différentielles homogènes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 19

On appelle **équation caractéristique** $X^2 + aX + b = 0$ associée à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficient constant $y'' + ay' + b = 0$
On note Δ son discriminant dans le théorème suivant

Théorème 20

• Si $\Delta \neq 0$; alors l'équation caractéristique a deux solutions $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ et les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme
$$y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
• Si $\Delta = 0$; alors l'équation caractéristique a une solution double $r \in \mathbb{K}$, et les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme
$$y : x \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rx},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Remarque 21

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que le discriminant est strictement négatif $\Delta < 0$, alors les solutions l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont des complexes conjugués, qu'on peut noter $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors **les solutions réelles** de l'équation homogènes sont de la forme
$$y : x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \ \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 22

Trouver les solutions **réelles** des équations différentielles suivantes :
$$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$(E_2) : y'' - 2y' + y = 0$$
$$(E_3) : y'' + 4y = 0$$

2 Trouver les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre

Théorème 23

Les solutions de l'équation avec second membre $y'' + ay' + by = c(x)$ s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Au programme de PSI, il n'existe qu'un seul cas particulier (avec ses vartiantes) où vous devez savoir trouver seul une solution particulière.

$\mathcal{P}$ropriété 24

Un cas particulier : si la fonction de second membre est de la forme $c(x) = cte \times e^{Rx}$ alors une solution particulière y_p sera de la forme

- $y_p : x \mapsto Ce^{\lambda x},\ C \in \mathbb{K}$ si R n'est pas racine du polynôme caractéristique
- $y_p : x \mapsto Cxe^{\lambda x},\ C \in \mathbb{K}$ si R est racine simple du polynôme caractéristique
- $y_p : x \mapsto Cx^2e^{\lambda x},\ C \in \mathbb{K}$ si R est racine double du polynôme caractéristique

MÉTHODE : pour trouver une solution particulière dans un de ces cas :
On connait la forme de y_p, qu'on réinjecte dans l'équation pour trouver la valeur de C.

Remarque 25

Les variantes de ce cas particuliers sont les seconds membres qui sont des combinaisons linéaires de ce cas (et on utilise le principe de superposition rappelé dessous) ou bien un second membre de la forme $c(x) = cte \times \cos(Rx) = \mathcal{R}e(cte \times e^{iRx})$ ou bien $c(x) = cte \sin(Rx) = \mathcal{I}m(cte \times e^{iRx})$, alors on a les mêmes formes de solutions particulières dont on prend les parties réelles ou imaginaires.

$\mathcal{P}$ropriété 26 (*Principe de superposition*)

Si y_1 est une solution particulière de $y'' + a(x)y' + by = c_1(x)$ et y_2 est une solution particulière $y'' + a(x)y' + by = c_2(x)$,
Alors $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière de $y'' + a(x)y' + by = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Exemple 27

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - y = \cos 2x - 3e^x$.

- L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $X^2 - 1 = 0$ et ses racines sont ± 1.

Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Cherchons d'abord une solution particulière de l'équation $y'' - y = \cos(2x) = \mathcal{R}e\left(e^{2ix}\right)$.

Cette solution sera la partie réelle d'une solution de l'équation $y'' - y = e^{2ix}$, qui est elle de la forme $y : x \mapsto Ce^{2ix}$ car $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X^2 - 1$.

$$y'' - y = e^{2ix} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}(-4C - C)e^{2ix} = e^{2ix} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{5}$$

Donc $x \mapsto \mathcal{R}e\left(\frac{-e^{2ix}}{5}\right) = -\frac{1}{5}\cos(2x)$ est une solution particulière de l'équation $y'' - y = \cos(2x)$

- Une solution particulière de l'équation $y'' - y = e^x$ est de la forme $y : x \mapsto Cxe^x$ car 1 est racine simple de $X^2 - 1$.

$$y'' - y = e^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (xC + 2C - xC)e^x = e^x \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Donc $x \mapsto \frac{xe^x}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y'' - y = e^x$

- Pour conclure : par principe de superposition, une solution particulière de (E) est

$$x \mapsto -\frac{1}{5}\cos(2x) - 3\frac{xe^x}{2}$$

Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} - \frac{1}{5}\cos(2x) - 3\frac{xe^x}{2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 28

Donner l'ensemble des solutions de l'équation

$$(E) : \; y'' - 2y' + y = \sin(3x) - e^x$$

3 Problème de Cauchy

Définition 29

Soit $c \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, $a, b, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array} \right.$$

est appelé un **problème de Cauchy**,et les égalités $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ sont appelées **conditions initiales**.

Théorème 30

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

MÉTHODE : pour résoudre un problème de Cauchy :
On résout comme vu au dessus l'équation différentielle, et l'ensemble des solutions dépend de deux paramètres λ et μ.
En réinjectant la forme des solutions dans le système $\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array} \right.$ cela permet de trouver les valeurs de λ et μ et donc l'unique solution.

Exemple 31

Donner l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Comme vu dans l'exemple 27, les solutions à l'équation différentielle $y'' - y = e^x$ sont de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} + \frac{xe^x}{2}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Une telle solution vérifie $y(0) = \lambda + \mu$ et $y'(0) = \lambda - \mu + \dfrac{1}{2}$,
elle est donc solution du problème de Cauchy ssi $\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\mu \\ 2\lambda = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right.$
Ainsi, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction

$$y : x \mapsto e^{-t} - e^t + \frac{xe^x}{2}$$

Exercice 32

Résoudre le poblème de Cauchy suivant : $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$

III Équations différentielles linéaires homogène d'ordre p à coefficients constants

Définition 33

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$.
On appelle **équations différentielles linéaires homogène d'ordre p** à coefficients constants une équation d'inconnue $y \in \mathscr{C}^p(I)$ de la forme

$$(E) : \ y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Définition 34

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **solution** de l'équation (E) si :

$$f \in \mathscr{C}^p(I) \quad \text{et} \quad \forall t \in I, f^{(p)}(t) + a_{p-1}f^{(p-1)}(t) + \cdots + a_0 f(t) = 0$$

MÉTHODE : pour résoudre une telle équation :
On se ramène à un système différentiel $Y' = AY$ en posant

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

et on applique la résolution comme en fin de polycopié.

Remarque 35 (*hors programme*)

La matrice ${}^tA$ est appelé matrice compagnon du polynôme $X^p + \cdots + a_1 X + a_0$, car son polynôme caractéristique est le polynôme $\chi_A = X^p + \cdots + a_1 X + a_0$. (cf Annexe)
Dans le cas $p = 2$ vu précédemment dans la partie II, l'équation caractéristique n'est rien d'autre que le polynôme caractéristique de la matrice du système, et il s'agit d'un cas particulier de cette résolution.

IV Équations différentielles linéaires d'ordre p à coefficients non constants

Définition 36

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, \ldots, a_p, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.
On appelle **équations différentielles linéaires d'ordre p** à coefficients non constants une équation d'inconnue $y \in \mathscr{C}^p(I)$ de la forme

$$(E) : \ a_p(t)y^{(p)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)$$

Définition 37

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **solution** de l'équation (E) si :

$$f \in \mathscr{C}^p(I) \quad \text{et} \quad \forall t \in I, a_p(t)f^{(p)}(t) + + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$$

MÉTHODE : dans le cas où les a_i et b sont des fonctions polynomiales : on cherche les solutions développable en série entière.

• Par analyse, on suppose qu'il existe une fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-R, R[$ (on calculera le rayon de convergence dans la synthèse), qui est solution de l'équation (E).

• Pour $t \in]-R,R[$, on réinjecte f dans (E) pour trouver une relation de récurrence sur les α_n (Méthode détaillée en dessous).
• Cette relation de récurrence permet de trouver le terme général de la suite (α_n), et donc la fonction f.
• Pour la synthèse, on regarde d'abord si le développement en série entière de f ne permet pas d'exprimer f comme une fonction usuelle. Si c'est le cas, on a l'intervalle I sur lequel elle est $\mathscr{C}^n$ (parce que $\mathscr{C}^\infty$ la plupart du temps), et on vérifie que f est bien solution de (E) sur I. Si on ne peut pas, on cherche le rayon de convergence R, et f est une solution de (E) DSE sur $]-R,R[$.
MÉTHODE pour trouver la formule de récurrence sur les α_n :
• On injecte $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ dans (E)
• on fait rentrer les monômes des fonctions a_i dans les sommes, pour n'avoir plus que des sommes
• on fait un changement d'indice sur chacune de ces sommes pour que la puissance du x soit exactement n (et on a donc des sommes de sommes de la forme $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (\star)x^n$)
• on sort les premiers termes des sommes pour qu'elles commencent toutes au même indice n_0, pour pouvoir les regrouper en mettant x^n en facteur
• on utilise l'unicité de l'écriture en DSE pour trouver des relations sur les α_i.

Exemple 38

Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constant

$$(E) : \qquad xy'' - y' + 4x^3 y = 0$$

• *Analyse :* On suppose qu'il existe une solution à (E) développable en série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ sur $I_R =]-R;R[$ alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I_R et on peut calculer ses dérivées successives en utilisant la formule de dérivation terme-à-terme des sommes de série entière :

$$\forall x \in I_R \qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n \quad \text{ et } \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\alpha_{n+2}x^n$$

Comme f est solution de (E) sur I_r, on a pour tout $x \in I_r$:

$$\begin{aligned}
0 = xf''(x) - f'(x) + 4x^3 f(x) &= x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\alpha_{n+2}x^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n\right) + 4x^3\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\alpha_{n+2}x^{n+1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}4\alpha_n x^{n+3}\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)\alpha_{n+1}x^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n\right) + \left(\sum_{n=3}^{+\infty}4\alpha_{n-3}x^n\right)
\end{aligned}$$

$$0 = (2\alpha_2 x + 6\alpha_3 x^2) - (\alpha + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2) + \sum_{n=3}^{+\infty}\left[(n+1)(n-1)\alpha_{n+1} + 4\alpha_{n-3}\right]x^n = \sum_{n=0} b_n x^n$$

où $b_0 = -\alpha_1$, $b_1 = 2\alpha_2 - 2\alpha_2 0$, $b_2 = 3\alpha_3$ et pour tout $n \geq 3$, $b_n = (n+1)(n-1)\alpha_{n+1} + 4\alpha_{n-3}$. Par unicité du développement en série entière (de la fonction identiquement nulle ici), on en déduit que les coefficients b_n sont tous nuls. Ainsi :

$$\alpha_0 = \alpha_0,\ \alpha_2 = \alpha_2,\ \alpha_1 = \alpha_3 = 0 \quad \text{ et } \quad \forall n \geq 3, \quad \alpha_{n+1} = -\frac{4\alpha_{n-3}}{(n+1)(n-1)}$$

Par récurrence, on montre facilement que tous les coefficients d'ordre impairs α_{2n+1} sont nuls. De plus, on a les relations de récurrence

$$\alpha_{4n+4} = -\frac{4\alpha_{4n}}{(4n+4)(4n+2)} = -\frac{\alpha_{4n}}{(2n+2)(2n+1)} \quad \text{et} \quad \alpha_{4n+2} = -\frac{4\alpha_{4n-2}}{(4n+2)(4n)} = -\frac{\alpha_{4n-2}}{(2n+1)(2n)}$$

dont on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_{4n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha_0 \quad \text{et } \alpha_{4n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha_2$$

Mais alors, en séparant les contributions modulo 4 du DSE de f on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n} + \alpha_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2} = \alpha_0 \cos(x^2) + \alpha_2 \sin(x^2)$$

• *Synthèse :* Soit a, b deux réels et $f : x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$. Alors on vérifie facilement que f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous avons ainsi déterminé les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Équations différentielles vectorielles

Définition 40

Soit $A : \begin{cases} I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto A(t) \end{cases}$ et $B : \begin{cases} I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto B(t) \end{cases}$ deux fonctions vectorielles continues sur I (ie. chaque fonction coordonnée est continue sur I)
On dit qu'une fonction $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est solution du système différentiel

$$(E) : X' = AX + B$$

si X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ et $\forall t \in I,\quad X'(t) = A(t) \times X(t) + B(t)$

Théorème 41 (*de Cauchy-Lipschitz linéaire*)

Pour toute condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \text{ possède une unique solution.}$$

C'est-à-dire que **l'ensemble des solutions** au système différentiel homogène $X' = AX$ est **un espace vectoriel de dimension n.**

Remarque 42

Il suffit donc de trouver n solutions non liées pour avoir une base des solutions du système différentiel.

Le cadre des théorèmes du programme sont pour les matrices constantes $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et les système sans second membre.

Propriété 43

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$ une valeur propre de A.
Alors pour tout $X_0 \in E_\lambda(A)$, la fonction

$$X : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = AX$

MÉTHODE : pour résoudre un système différentiel $(E) : X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable.
Si A est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres $X_1, \dots, X_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes), et les solutions du système différentiel $(E) : X' = AX$ sont de la forme

$$x \mapsto k_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} X_n, \quad \text{avec } k_i \in \mathbb{K}$$

Exemple 44

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$
On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc le système (S) est équivalent à l'équation différentiel homogène $X' = AX$.
A est diagonalisable car elle est symétrique réelle, par le théorème spectral, et son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X - 3)(X - 1)$,
on cherche des vecteurs propres et par le calcul on trouve

$$E_1(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \text{ et } E_3(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Donc les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Les solutions du système (S) sont de la forme :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t} \\ y : t \mapsto -\lambda e^t + \mu e^{3t} \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 45

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3y + 2z \\ y' = -2x + 5y + 2z \\ z' = 2x - 3y \end{cases}$$

Annexe

Propriété 46

On considère un polynôme unitaire $P = a_0 + a_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}_n[X]$, et on note C_P sa matrice compagnon définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique χ_{C_P} est P.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

On sait que $\chi_{C_P}(\lambda) = (-1)^n \det(C_p - \lambda I_n)$.

Calculons ce déterminant, sur lequel on va effectuer les opérations élémentaires $Lj \leftarrow L_j + \lambda L_{j+1}$, pour j allant de $n-1$ à 1 (dans cet ordre) :

$$\begin{aligned}
\det(C_p - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} -\lambda & & & & -a_0 \\ 1 & -\lambda & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \quad Lj \leftarrow L_j + \lambda L_{j+1}, j = n-1, \cdots, 1 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & & & & -a_0 - a_1\lambda - \cdots - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n \\ 1 & 0 & & & -a_1 - a_2\lambda - \cdots - \alpha_{n-1}\lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{n-1} + \lambda\alpha_{n-1} - \lambda^2 \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}(-a_0 - a_1\lambda - \cdots - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n) \quad \text{En développant par rapport à la première ligne} \\
&= (-1)^n P(\lambda)
\end{aligned}$$

Pour conclure, $\chi_{C_P}(\lambda) = P(\lambda)$, et cette égalité reste vraie pour une infinité de valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\chi_{C_P} = P$. ■