$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n} = S(x)$$

$R_{CV} = 1$

$n \leftarrow n \pm l \quad l \in \mathbb{N}$

$\left(k \leftarrow n-k \right.$ "compte à l'envers"

$\sum_{k=0}^{n}$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\underline{2n+1}} x^{2n+1}$$

$2n \leftarrow n$

termes impairs de $-\ln(1-x)$

$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

$\forall x \in]-1,1[$

$$x S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$\frac{d}{dx}$

$$(x S(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

$$x S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt$$

ou $\quad x S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ partie impaire de $-\ln(1-x)$

$$= \frac{-\ln(1-x)+\ln(1+x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\cancel{5}$

$(x^3+3x^2+x)e^x$

Exo 3

$\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ $\quad \sin(x) = \overset{= x + \frac{x^3}{3!}}{\sum_{n=0}^{+\infty}} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})} \times \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et ne s'annule pas}}} \qquad e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

car DSE

$$= x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{x}{2}$$

donc par thé généraux

$x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Exo 4

$(a, b) \subset]-1, 1[$

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx \quad \left(\text{car } x \in [a, b] \right)$$

pour intervertir $\int_0^1$ et $\sum$ il faut montrer

que $\underbrace{\sum_{n \geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{f_n(x)}$ CVU sur $[0, 1]$.

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{1}{2n+1} \quad \text{TG d'une } \sum \text{ div}$$

Donc pas CVN

Soit $x \in [0,1)$, Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right| = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)_n$ est décroissante, donc la série CVS sur $[0,1)$ par le TSSA

Soit $p \in \mathbb{N}$

$$|R_p(x)| = \left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leq \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \leq \frac{1}{2p+1}$$

car $x \in [0,1)$

$\frac{1}{2p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ indep de x

$R_p \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0,1)$ car son reste CVU vers 0

Donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1)$ et on peut appliquer le thé d'interversion $\Sigma / \int$:

Ainsi :

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx$$

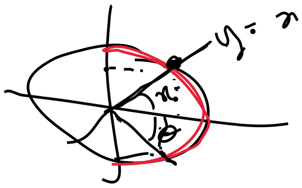
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$\arctan \in C^0([0,1])$ $\qquad \arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$

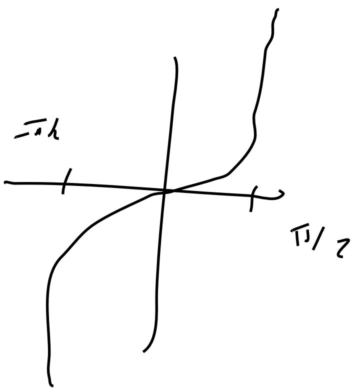
or $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\arctan(x)}_{\text{dériv}} \times \underbrace{1}_{\text{prim}} \, dx \overset{IPP}{=} \left[\arctan(x)\times x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$



$$= \arctan(1) - \left[\frac{1}{2}\ln\left(|1+x^2|\right)\right]_0^1$$

$$= \pi/4 - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$\arctan = \left(\tan_{]-\pi/2,\pi/2[}^{]-1,1[}\right)^{-1}$

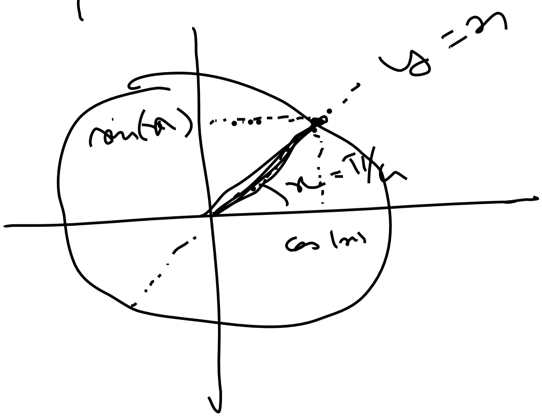


si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$

$1 = \tan(x) \iff x = \arctan(1)$

$\iff \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \iff \sin(x) = \cos(x)$



Exo 5/ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ $\boxed{R = 1}$

on reconnaît du $\ln(1+x)$ qu'on a primitivé

ou du $\dfrac{1}{1+x}$ qu'on a primitivé $2\times$

$I_R =]-1,1[$

Soit $x \in]-1,1[$,

$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \ln(1+x)$

$$f(x) = \int_0^x 1 \times \ln(1+t)\,dt = \Big[t\ln(1+t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t+1-1}{1+t}\,dt$$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= x\ln(1+x) - \Big[t - \ln(1+t)\Big]_0^x$$

$$= (x+1)\ln(1+x) - x$$

3/ $f(1) \overset{?}{=} 2\ln(2) - 1$

$g : x \mapsto (x+1)\ln(1+x) - x \in \mathcal{C}^0(]-1, 1])$

prolong. par $\mathcal{C}$ en -1

$f(x) = \sum^{+\infty} \ldots$

$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = g(x)$

$$\sup_{[-1,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2} \text{ TG d'}\Sigma\text{CV}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ CVN (donc CVU) sur $[-1, 1]$

Donc $f \in \mathcal{C}^0([-1;1])$

$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$ car f et g $\mathcal{C}^0$ en 1

Exo 6 : $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathcal{D}_f =]-1,1[$.

2/ f est dérivable sur $]-1,1[$ par les thé gé

$\forall x \in]-1,1[$

$f'(x) =$ .... (à faire)

f est sol du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)y' - xy = 1 & (E) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3/ On cherche une fct DSE solution de (E)

$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall x \in]-r,r[$, $r > 0$

on suppose que g est sol de (E)

.... .

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$R = 1$

et $g(0) = 0$

Donc g et f sont sols du même problème de Cauchy donc $g = f$ sur $]-1, 1[$

et on a montré f est DSE sur $]-1, 1[$.