Groupe A

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & b & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$B_1 = |a+b| = a+b$$

~~I : ok.~~

~~H :~~

$$B_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab$$
$$= a^2 + ab + b^2$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$ dvp 1° col

$$= a+b \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a^2+ab+b^2) - ba(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2+b^2)$$

Exo 4

1/ Nombre de racines

$P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n.

<u>Thé</u> de d'Alembert Gauss.

Les polynômes irred de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Tout polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

$\hookrightarrow$ par rec : <u>Corollaire</u> : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicité.

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \quad \text{de degré } n \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \ \alpha \in \mathbb{C}$$

<u>Ex</u> : $P = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ 2 racines i et $-i$ ($\in \mathbb{R}[X]$)

$P = (X-1)^2$ 2 racines 1 et 1

1 est racine double de multiplicité 2.

Cas thé de d'AG. $P = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ avec z_k <u>tous distincts</u>

on veut montrer que les z_k sont racines simples

<u>Caractérisation</u> de la multiplicité des racines

λ est racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}$

<u>si</u> $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) = 0$ ... et $P^{(m-1)}(\lambda) = 0$

et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

"car"

$$\begin{cases} P = (X-\lambda)^m Q(X) \\ P' = m(X-\lambda)^{m-1} Q(X) + (X-\lambda)^m Q'(X) \\ \quad = (X-\lambda)^{m-1} \left[mQ(X) + (X-\lambda) Q'(X) \right) \\ P'' = (X-\lambda)^{m-3} \left(\qquad \right) \end{cases}$$

2/ relation coeff-racines.

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \quad \text{coeff}$$

$$= a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \quad \text{racine}$$

<u>ex</u> : $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$

$$= X^3 + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)X + (-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

1/ Par corollaire de l'AG P_n est de degré n donc admet n racines complexes.

Si par l'absurde une de ces racines z n'est pas simple, alors

$P_n(z) = 0$ et $P_n'(z) = 0$

donc
$$\begin{cases} z^n - z + 1 = 0 \\ nz^{n-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nz^{n-1} = 1 \\ -nz + z + n = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow nL_1$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - zL_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nz^{n-1} = 1 \\ z(1-n) = -n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} nz^{n-1} = 1 \\ z = \dfrac{n}{n-1} \end{cases}$$ contradiction

donc toutes les racines sont simples.

2/ $$P_n = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k) = 1 - X + X^n$$

$$= (X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n)$$

$$= \Big(\underbrace{(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n}_{\sigma_n}\Big) + \Big((-1)^{n-1} z_2 z_3 \cdots z_n + (-1)^{n-1} z_1 z_3 \cdots z_n + (-1)^{n-1} \underbrace{z_1 z_2 z_3 \cdots z_{n-1}}_{\sigma_{n-1}}\Big) X + \cdots + X^n$$

Par unicité de l'écriture poly $\begin{cases} \sigma_n (-1)^n = 1 \\ \sigma_{n-1} (-1)^{n-1} = -1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \sigma_n = (-1)^n \\ \sigma_{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n \end{cases}$$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1+z_1 & & & (1) \\ & 1+z_2 & & \\ (1) & & \ddots & \\ & & & 1+z_n \end{pmatrix}_{[n]}$ ~~dvlpt dernière colonne~~

$$\cancel{\det(A) = (1+z_n) \left| \quad \right|_{(n-1)}}$$

$$- \begin{vmatrix} 1+z_1 & & (1) \\ & 1+z_2 & \\ (1) & & \ddots \; 1+z_{n-2} \\ 1 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+z_1 & & & \\ & & 1+z_{n-3} & \\ 1 & \cdots & & 1 \\ & & & 1+z_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + z_j \cdot e_j$$

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

e_j en base can de $\mathbb{R}^n$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & C_2 & \cdots & C_n \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & C_3 & C_n \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & C_3 & \cdots & C_n \\ \vdots & z_2 & & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 1 & \vdots & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & 1 & C_3 & \cdots & C_n \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & 0 & C_3 & \cdots & C_n \\ 0 & z_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \vdots & (z_1) & \\ \vdots & 1 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1) & \begin{matrix} 0 \\ z_2 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} & (1) \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$+ \cdots \begin{vmatrix} (1) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_n + \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \vdots & z_2 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & z_n \\ 1 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & 1 & & \\ & \vdots & z_3 & (0) \\ & \vdots & & \ddots \\ & \vdots & & z_n \\ & 1 & & \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} z_1 & & (0) & 1 \\ & z_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & z_{n-1} & \vdots \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_n + \sigma_{n-1} = 2(-1)^n$$

$$\det(C_1|\dots|\lambda C_j + \mu \tilde{C}_j|\dots|C_n) = \lambda \det(C_1|\dots|C_n) + \mu \det(C_1|\dots|\tilde{C}_j|\dots|C_n)$$

Exo 6 Si $\forall x \in E$ $u(x)$ est coli à x

Si $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda_x \cdot x$

Mq $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ $u(x) = \lambda . x$

Soit $x, y \in E$ alors $u(x) = \lambda_x \cdot x$
$u(y) = \lambda_y \cdot y$

on veut mq $\lambda_x = \lambda_y$

Si (x,y) est libre

$$u(x) = \lambda_x \cdot x$$
$$u(y) = \lambda_y \cdot y$$
$$u(x+y) = \lambda_{x+y} \cdot (x+y) \quad (3)$$

par linéarité de u (3) : $u(x) + u(y) = \lambda_{x+y} \cdot x + \lambda_{x+y} \cdot y$

ie $\lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y = \lambda_{x+y} \cdot x + \lambda_{x+y} \cdot y$

donc $\begin{cases} \lambda_x = \lambda_{x+y} \\ \lambda_y = \lambda_{x+y} \end{cases}$ par liberté de (x,y)

et $\lambda_x = \lambda_y$

Si (x,y) est liée $\quad x = \alpha y \quad$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$

ou $y = \alpha x$

cas trivial $\begin{cases} \text{si } x = 0 \\ \text{ou si } y = 0 \end{cases}$ $\quad u(x) = 0 \quad$ ou $u(y) = 0$

si $x \neq 0$, $y \neq 0$ $\quad x = \alpha y, \ \alpha \in \mathbb{K}^*$

$$u(x) = \lambda_x \cdot x$$
$$= u(\alpha y) = \alpha \cdot u(y) = \alpha \cdot \lambda_y \cdot y$$
$$= \lambda_y \cdot \alpha \cdot y = \lambda_y \cdot x.$$

donc $\lambda_n \cdot x = \lambda_y \cdot x$

$$(\lambda_n - \lambda_y) \cdot x = 0$$

$\lambda_n = \lambda_y$ ou $\underbrace{x = 0}_{\text{Faux}}$

donc $\lambda_n = \lambda_y$.

$\boxed{\text{Groupe B}}$

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & b & a+b \end{vmatrix}_{(n)}$$

dvpt 1° ol

$=$