$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases} \qquad \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E$$

$$\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_r) \text{ base de } F$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} f(e_i) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & \boxed{\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{array}} & \end{array} \right) & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{array} \end{array}$$

$$F \ni f(e_i) = \lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_r \cdot f_r$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P' + P(1) \end{cases}$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}^{\mathbb{R}_3[X]}, \mathcal{B}_{can}^{\mathbb{R}_2[X]}}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

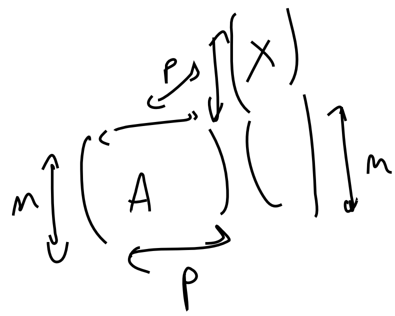
$\varphi(1) = 1$

$\varphi(X) = 1+1 = 2$

$\varphi(X^2) = 2X + 1$

$\varphi(X^3) = 3X^2 + 1$

Remarque : Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A, souvent noté $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{cases}$, dans les bases canonique.



$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}can}(f_A)$$

Prop : Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$

$\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F et G

$x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_i)$ $\quad X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$

alors

1/ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_1(x)) = A_1 X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$

2/ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f_1 + f_2) = \lambda A_1 + A_2$

3/ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$

4/ f_1 est bijective ssi M_1 est inversible

avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f_1^{-1}) = M_1^{-1} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1)\right)^{-1}$

Rem : 2/ Se relit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \end{cases}$$ est linéaire.

1/3/4/ : "multiplier à gauche" par la matrice d'une application revient à composer par l'application.

Ex :
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P' + P(1) \end{cases}$$

Rem :
$\ker(M)$ sev de $\mathbb{R}^4$
$\ker(\varphi)$ sev de $\mathbb{R}_3[X]$

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $P_0 = X^3 - 5X + 1 \in \mathbb{R}_3[X]$ $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}^{\mathbb{R}_3[X]}}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}^{\mathbb{R}_2[X]}}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

ie $\varphi(P_0) = 3X^2 + \cancel{-}8$

Def : On appelle image et noyau d'une matrice les image et noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à f

Rem : sev de $\mathbb{K}^n$

Def : Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace E

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(Id_E)$$

$$= \begin{array}{c} \mathcal{B}_2 \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}_{\mathcal{B}_1}$$

Ex : $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ base de $\mathbb{R}^3$

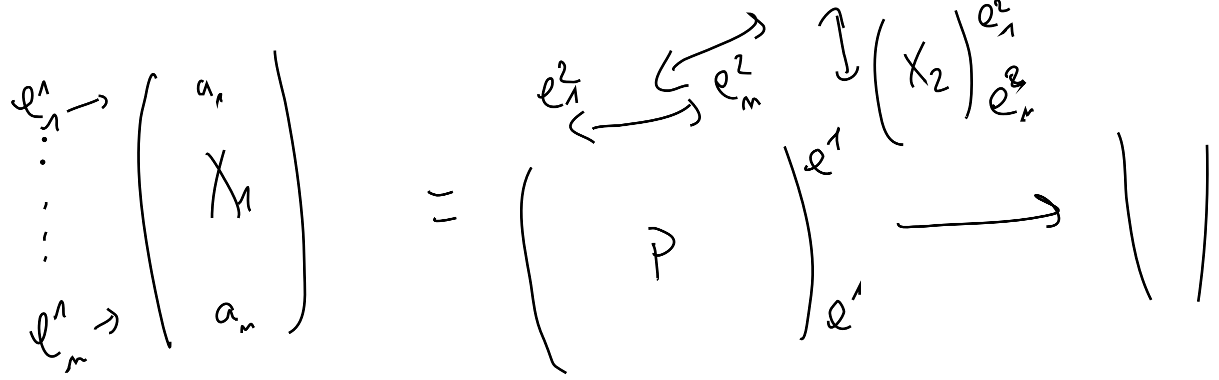
$$P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array} \end{array}$$

Thé : (Formule de changement de base pour un vecteur)

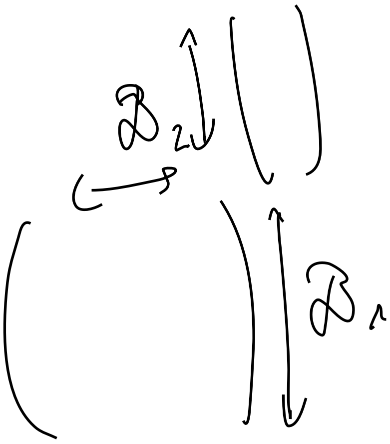
Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, soit $x \in E$

on note $X_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $X_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$

$$X_1 = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \cdot X_2$$



$x = a_1 \cdot e_1^1 + \cdots + a_n \cdot e_n^1$



Ex : $P_0 = X^3 - 5X + 1 \qquad X_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

soit $\mathcal{B}_1 = (1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$

autre base de $\mathbb{R}_3[X]$

$$X_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(P_0) = \, ?$$

On peut résoudre $X^3 - 5X + 1 = a \cdot (1) + b \cdot (1+X) + c(1+X+X^2) + d(1+X+X^2+X^3)$

pour avoir $X_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$X_1 = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_1} \cdot X_2$

$1+X+X^2$

avec
$$P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

Thé : (Formule du changement de base pour les applications linéaires)

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux bases de F

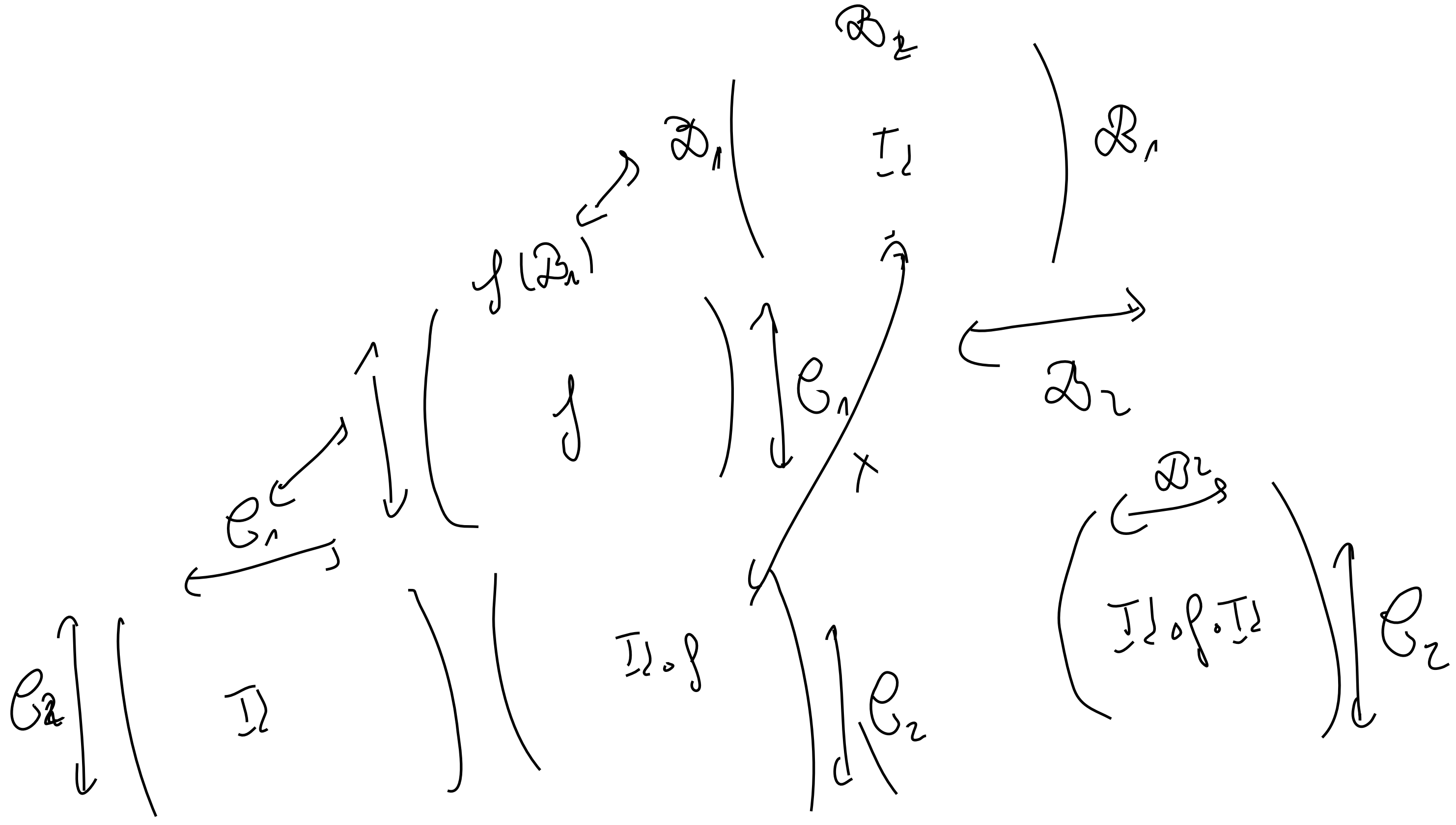
$f \in \mathcal{L}(E, F)$

on note $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f)$

$M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f)$

$$\boxed{M_2 = P^{-1}_{\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2} \, M_1 \, P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}}$$

Rem : $P^{-1}_{\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2} = P_{\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1}$



<u>Ex</u> : corrigé du TD.

<u>Déf</u> : On dit que les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$

$$A = P^{-1} B Q .$$

Cela veut dire que A et B sont les matrices de la même application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dans des bases différentes.

<u>Rem</u> : Cas particulier pour les endomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E

on note $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ ~~et~~ $M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$

on note $P = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$

$$\boxed{M_2 = P^{-1} M_1 P}$$

<u>Def</u> : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On dit que A et B sont semblables si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = P^{-1} B P$$

Cela veut dire que A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

4/

TD n°3

Exercice 5/

2/ $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (x-y, -x+z, 3x-2y-z) \end{cases}$

$\mathcal{B}' = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = M$$

on note $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M P =$$

avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenu par le pivot

$P =$ | $L_2 - L_2 - L_3$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$\vdots$

I_3 | P^{-1}

Exo 7 : On suppose $f(A) \subset f(B)$

on veut montrer $A + \ker f \subset B + \ker(f)$

Soit $x \in A + \ker f$

$\exists a \in A$ et $\exists k \in \ker f$ tq $x = a + k$

or $f(A) \subset f(B)$ donc $\forall y \in f(A)$ alors $y \in f(B)$

donc $\forall y \in f(A)$ $\exists x_b \in B$

$\exists x_a \in A, y = f(x_a)$ $y = f(x_b)$

donc $\forall x_a \in A, \exists x_b \in B), f(x_a) = f(x_b)$

$f(x) = f(a+k) = f(a) + \underbrace{f(k)}_{=0}$ car f linéaire
$= f(a)$

Donc $\exists b \in B$ tq $f(x) = f(a) = f(b)$

ie $f(x) - f(b) = 0$ | idée.
soit $f(x-b) = 0$

donc $x - b \in \ker(f)$ donc $\exists k_2 \in \ker(f)$
$x - b = k_2$

et donc $x = b + k_2 \in B + \ker(f)$

$\Leftarrow$) On suppose $A + \ker f \subset B + \ker f$

on veut montrer que $f(A) \subset f(B)$

Soit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists a \in A,\ y = f(a)$

$a = a + 0_E \in A + \ker(f)$ (idée)

donc $a \in B + \ker(f)$

ie $\exists b \in B$ et $\exists k \in \ker(f)$ $a = b + k$

donc $y = f(a) = f(b+k) = f(b) + 0 \in f(B)$

Exo 8 :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ M^k s'écrit de la forme $\begin{pmatrix} u_k & v_k & \\ & w_k & \end{pmatrix}$

. Pour $k=1$ on pose $u_1 = 0$ $v_1 = 1$ et $w_1 = 1$

$M^1 = M$ qui est de la bonne forme.

. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose M^k est de la forme $\begin{pmatrix} u_k & v_k & \\ & w_k & \end{pmatrix}$

avec $u_k, v_k, w_k \in \mathbb{R}$.

$$M^{k+1} = M \times M^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k & \\ & v_k & \\ & w_k & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_k \; v_k & 4u_k + v_k & v_k \; v_k \\ v_k \; v_k & 4u_k + v_k & \\ & 4v_k + w_k & \\ v_k & & v_k \end{pmatrix}$$

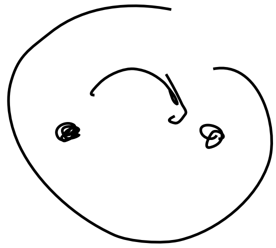
on pose $\begin{cases} u_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} = 4u_k + v_k \\ w_{k+1} = 4v_k + w_k \end{cases}$

alors M^{k+1} est de la forme $\begin{pmatrix} u_{k+1} & v_{k+1} & u_{k+1} \\ & w_{k+1} & \end{pmatrix}$

ccl : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, M^k est de la forme

$\forall n \geq 2$

$2 \leadsto \leadsto \sim$



H : " $\Rightarrow$ " est vraie

Or au cours de l'hérédité, on a prouvé que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} = 4u_k + v_k & (2) \quad k \Rightarrow k+1 \\ w_{k+1} = 4v_k + w_k \end{cases}$$

Donc par (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{k+2} = 4u_{k+1} + v_{k+1}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $v_{k+2} - v_{k+1} - 4v_k = 0$

(v_k) vérifie une réc. linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique $X^2 - X - 4$ a pour racines

$$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On $v_1 = 1$ $\quad v_2 = \cancel{1}$ (calcul de M^2

soit $\begin{cases} 1 = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \\ 1 = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \mu\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

Soit $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ v_k = \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^k\right)}$

<u>Def</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$\det(f) := \det(M)$

où M est une matrice de f dans n'importe quelle base

<u>Rappel</u> : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Exo 8 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X \longmapsto AX \end{cases}$$

$$\det(f^3) = \det(A^3) \qquad (\text{car } \mathrm{Mat}(f \circ f \circ f) = A^3)$$

$$= \det(-A)$$

$$= (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$$

$\det(A)^3 = -\det(A)$ ie $\det(A)\left(\underbrace{\det(A)^2 + 1}_{\neq 0}\right) = 0$

donc $\det(A) = 0 = \det(f)$