Chapitre 7 : Séries entières

I Les séries entières

1 Convergence simple

Définition 1

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On appelle **série entière** associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum f_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ z \mapsto a_n z^n \end{cases}$$

On note $\sum a_n z^n$ une telle série entière.

Exemple 2

La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ est la série entière associée à la suite $(\frac{1}{n!})$.

Remarque 3

• La suite (a_n) est parfois définie à partir d'un certain rang n_0, et on peut noter $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ la série entière de coefficients $(a_n)_{n \geq n_0}$.
(C'est la nature de la série qui nous intéresse dans ce chapitre, les premiers termes n'entrent pas en compte pour les théorèmes de ce cours)

• Les sommes partielles d'une telle série $S_n : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{cases}$ sont des fonctions polynomiales.

• On note D, le domaine où la série de fonctions converge simplement, la somme de la série $S : \begin{cases} D \to \mathbb{K} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ **n'est pas** une fonction polynomiale.
Nous verrons cependant qu'une telle fonction partage des propriétés avec les fonctions polynomiales (classe $\mathscr{C}^\infty$, facilité de calcul de dérivées, de primitives...)
Le domaine D où une série de fonctions converge simplement est généralement difficile à calculer, mais il est facile dans le cadre particulier des séries entières.

Définition 4

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\}$ qu'on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r.

Exemple 5

Pour la série exponentielle, $\sum_n \frac{z^n}{n!}$, le domaine $D = \mathbb{C}$, et sa somme est la fonction exponentielle complexe.
Pour la série géométrique $\sum z^n$

Remarque 6

C'est de la croissance comparée à une série géométrique.

2 Lemme d'Abel et rayon de convergene

Lemme 7 (*d'Abel*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)$ soit bornée.
Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration : Si $z_0 = 0$, alors rien à montrer.
Si $z_0 \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$ car la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée.
Par comparaison à une série géométrique cv, la STP $\sum |a_n z^n|$ est cv, donc la série $\sum a_n z^n$ est absolument cv (donc cv). ■

Exemple 8

$\forall \alpha \in \mathbb{N}$, la suite $(n^\alpha z^n)$ est bornée dès que $|z| < 1$ (croissance comparée polynôme et géométrique), donc $z_0 = 1$ fonctionne pour le lemme d'Abel.

Définition 9

On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure des réels $\rho \geq 0$ tel que la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

$$R = \sup \{\rho \in \mathbb{R}_+,\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \text{ ou } +\infty$$

Remarque 10

• Le rayon de convergence est bien défini :
L'ensemble $\{\rho \in \mathbb{R}_+,\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$ est non vide car $\rho = 0$ est dedans.
L'ensemble n'est pas forcément majoré, donc $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Si l'ensemble est majoré, $R = \sup \{\rho \in \mathbb{R}_+,\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$ sinon $R = +\infty$.
On pourrait résumer cela en disant que R est la borne sup calculée dans $\overline{\mathbb{R}}$.
• Attention, le R étant une borne sup, il n'est pas forcément atteint. La suite $(a_n R^n)$ est n'est pas forcément bornée.
• le rayon R ne dépend que de la suite (a_n)

Exemple 11

$\forall \alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de cv de la série entière $\sum n^\alpha z^n$ est

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de cv $R =$
La série entière $\sum n! z^n$ a pour rayon de cv $R =$
La série entière $\sum \frac{1}{2^n} z^n$ a pour rayon de cv $R =$

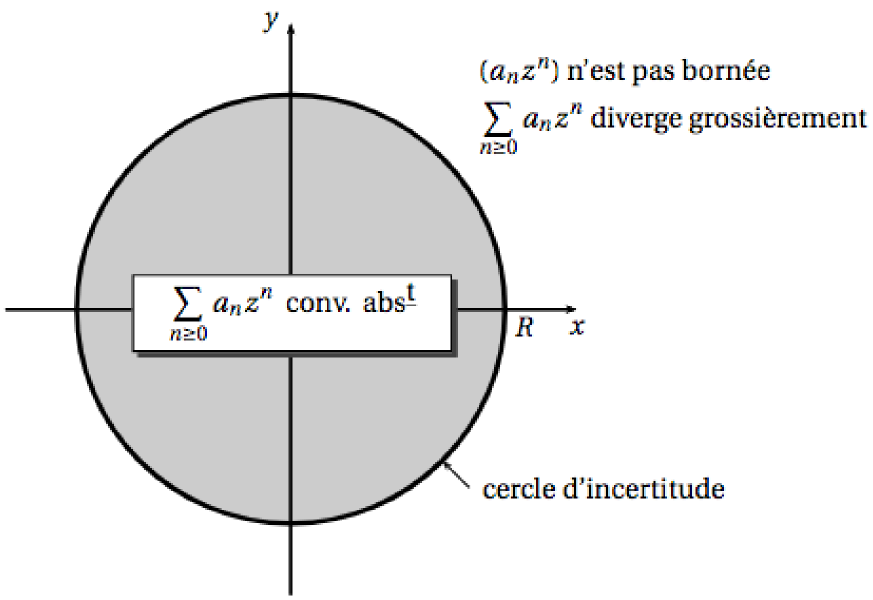
Théorème 12 (*disque de convergence*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ on ne sait pas.
   La boule ouverte $B(0, R)$ s'appelle **disque de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.
   Dans le cas réel, $]-R, R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence**.
   Si $R = +\infty$, le domaine de convergence est $\mathbb{K}$ tout entier.
   Le cercle $\{z \in \mathbb{R}, |z| = R\}$ (sa frontière) est appelé **cercle d'insertitude** de la série entière.
   Dans le cas réel,

Démonstration : 1. C'est le lemme d'Abel : si $|z| < R$, par définition de la borne sup, il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tq $(a_n \rho^n)$ est bornée et $|z| < \rho$.

2. Si $|z| > R$, alors $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée, donc $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0. ∎



Exemple 13

3 Calcul du rayon de cv

Propriété 14 (*conséquence directe du lemme d'Abel*)

La nature de la série $\sum a_n z^n$ en un point donne un encadrement de son rayon de cv R :

1. Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$
2. Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$
3. (HP : Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente (ie cv, mais ne cv pas absolument), alors $R = |z_0|$)

Propriété 15 (*comparaison des rayons de cv*)

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv respectifs R_a et R_b.

1. si àpcr $|a_n| \leq |b_n|$, ou si $a_n = O(b_n)$, ou si $a_n = o(b_n)$ alors

$$R_a \qquad R_b$$

2. si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration :

1. si $a_n = O(b_n)$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $a_n z^n = O(|b_n z^n|)$,
   Donc, pour $|z| < R_b$, la série $\sum b_n z^n$ cv absolument, donc par comparaison de STP, la série $\sum a_n z^n$ cv absolument donc cv. Ainsi $R_a \geq R_b$
2. si $|a_n| \leq |b_n|$, ou si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$
3. si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ ■

Remarque 16

Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors on a toujours $R_a = R_b$. (utile si a_n et b_n sont des suites complexes, ou alternées)

Exemple 17

Donner le rayon de cv de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$.

Exemple 18

Donner le rayon de cv de la série entière $\sum \ln(1+\frac{1}{n})z^n$.

Remarque 19

Pour étudier la convergence des séries numériques à termes positifs, nous disposons de la règle de d'Alembert, dont on sait qu'elle permet de conclure à des convergences absolues ou des divergences grossières, ce qui est le cas des séries entières en dehors du bord du disque de convergence. Il paraît donc judicieux de tester cette règle dans le cadre des séries entières.

Théorème 20 (*critère de d'Alembert pour les séries entières*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose $a_n \neq 0$ àpcr
Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$, alors
Le rayon de cv R vaut $\frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$:
i.e. $R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} \text{ si } \ell \in \mathbb{R}_+^* \\ +\infty \text{ si } \ell = 0 \\ 0 \text{ si } \ell = +\infty \end{cases}$

Remarque 21

Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ n'a pas de limite, il faut utiliser les majorations ou comparaion pour calculer le rayon de convergence.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Supposons que $a_n \neq 0$ pour n assez grand. Pour $z = 0$, la série converge toujours. Si $z \neq 0$, le quotient apparaissant dans la règle de d'Alembert est (pour n assez grand)

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|.$$

Supposons que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ possède une limite ℓ (éventuellement infinie). Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\,|z|.$$

D'après la règle de d'Alembert :

- Si $\ell = 0$, la série converge absolument quel que soit z et $R = +\infty$.
- Si $\ell = +\infty$, elle ne converge que pour $z = 0$ et $R = 0$.
- Si $\ell \in]0, +\infty[$, alors : si $\ell|z| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument, et si $\ell|z| > 1$, elle diverge grossièrement. Ainsi $R = 1/\ell$.

Exemple 22

Donner les rayons de cv des séries entières $\sum nz^n$, $\sum n!z^n$ et $\sum \dfrac{2^n}{(n!)^2}z^n$.

Remarque 23

- Attention aux séries dites « lacunaires », dans lesquelles tous les exposants n'apparaissent pas, comme la série

$$\sum_{n\geqslant 1} 2^n \ln(n)\, z^{2n}.$$

Pour cette série, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 2^p \ln(p)$ si $p \geqslant 1$, mais $a_{2p+1} = 0$. Il ne faut pas faire l'erreur de dire que $a_n = 2^n \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui donnerait un rayon de convergence (faux) de $1/2$. Pour $n \geqslant 2$, et $z \neq 0$,

$$\left|\frac{2^{n+1}\ln(n+1)\, z^{2(n+1)}}{2^n \ln(n)\, z^{2n}}\right| = 2\,\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\,|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2|z|^2.$$

On en déduit que la série converge absolument si $2|z|^2 < 1$ et diverge si $2|z|^2 > 1$. Le rayon de convergence est donc $1/\sqrt{2}$. On retiendra que pour appliquer la règle de d'Alembert à de telles séries, il faut revenir à la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

MÉTHODE pour trouver le rayon de cv d'une série entière $\sum a_n z^n$

- On cherche un équivalent de $a_n \sim b_n$, avec $\sum b_n z^n$ une série entière de référence , et alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de cv
- Si la suite (a_n) ne s'annule pas àpcr (et est formée de produit, puissances, exponentielles, factorielles, ...) on essaye d'appliquer la règle de d'Alembert
- Si elle ne s'applique pas on essaye des majorations ou minorations de $|a_n|$.

4 Opérations sur les séries entières

Théorème 24 (*somme de séries entières*)

Soit deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv respectifs R_a et R_b.
La somme de ces séries entières $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de cv R_{a+b} vérifiant

1. $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$
2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$
3. $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Démonstration – Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) z^n$ converge, et on a la formule annoncée. En particulier, on en déduit que $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

Si $R_a \neq R_b$ (par exemple $R_a < R_b$), alors pour r vérifiant $R_a < r < R_b$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ diverge tandis que la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n r^n$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) r^n$ diverge. On a donc, dans ce cas, $R \leqslant \min\{R_a, R_b\}$. ☐

Remarque 25

• Si $R_a = R_b$, il est possible que $R_{a+b} \neq R_a$, par exemples les séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont pour rayon de cv 1, et leur somme a pour rayon de cv $+\infty$.
• Cette propriété se généralise aux CL :
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ a pour rayon de cv $R \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Théorème 26 (*Produit de Cauchy de séries entières*)

Soit deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv respectifs R_a et R_b.
Alors leur produit de Cauchy

$$\sum_n \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

est une série entière de rayon de cv R_{ab} vérifiant

1. $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$
2. $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

Démonstration – Le produit de Cauchy des deux séries est la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n}(a_p z^p)(b_q z^q)\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) z^n.$$

Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent absolument, donc d'après le théorème de convergence du chapitre **Séries numériques**, on a convergence du produit de Cauchy, ainsi que la formule annoncée. En particulier $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

Exemple – Le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n z^n$ où, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$; de plus $\sum_{n\geqslant 1} H_n$ diverge grossièrement, donc $R = 1$.

Attention ! Il n'y a pas de cas d'égalité pour les rayons de convergence de produits de séries entières : les séries entières $1 - z$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs $+\infty$ et 1, qui sont distincts, mais leur produit de Cauchy est la série constante égale à 1, de rayon de convergence $+\infty > \min\{1, +\infty\}$. En effet, avec les notations du théorème, on a ici

$$\sum_{p+q=0} a_p b_q = a_0 b_0 = 1 \times 1 = 1,$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0.$$

II Régularité des séries entières

On note pour le reste du chapitre :
La série entière $\sum f_n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ de rayon de cv R.

Théorème 27

La série de fonction $\sum f_n$ CVN sur tout segment inclus dans l'intervalle de cv $]-R, R[$.

Démonstration – Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-R,R[$ et $r = \max\{|a|,|b|\} \in [0,R[$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument car $r \in [0,R[$, d'où le résultat. □

Attention ! Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur l'intervalle ouvert de convergence tout entier : par exemple, la série de fonctions associée à $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$, car la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge.

Théorème 28 (*continuité*)

La somme de la série entière $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R,R[$

La somme de la série entière d'une variable complexe $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$ le disque ouvert de convergence

Démonstration : La série de fonctions CVN donc CVU sur tout segment de $]-R,R[$ et les f_n sont continues sur $]-R,R[$.
Point complexe admis ■

Théorème 29 (*primitivation terme à terme*)

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme de la série entière sur $]-R,R[$, (elle est continue donc admet une primitive)
Alors l'unique primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Démonstration – D'après le théorème fondamental, l'unique primitive de f sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Par continuité des fonctions $f_n : t \mapsto a_n t^n$ et convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur tout segment de $]-R,R[$, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions : si $x \in]-R,R[$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n\,dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Remarque 30

On peut primitiver terme à terme les séries entières sur leur intervalle ouvert de CV.
Pour avoir le rayon de cv de la série entière primitive, on utilise le lemme suivant :

Lemme 31

Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de cv R, alors la série entière
$\sum n a_n z^n$ avec pour rayon de cv R

Démonstration : On note R' le rcv de $\sum n a_n z^n$.

Comme $a_n = O(na_n)$, alors $R \geq R'$
Si $R = 0$, alors $R \leq R'$, et si $R > 0$, pour $r \in [0, R[$, on peut trouver $\rho > r$ tq $(a_n \rho^n)_n$ est bornée (par def du rdv)
et on note $na_n r^n = n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n a_n \rho^n$
Comme la suite $(n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n)$ est bornée par croissance comparée, alors $(na_n r^n)$ est bornée et $R' \geq R$ ■

Remarque 32

Cela veut dire l'unique primitive de f qui s'annule en 0 $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ d'une série entière a le même rayon de cv.
De manière générale, multiplier ou diviser par n le TG d'une série entière ne change par son rayon de cv.

Théorème 33 (*dérivation terme à terme*)

La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série entière est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

et la série entière dérivée $\sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1}$ a le même rayon de cv R

Démonstration – Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ avec $f_0' = 0$ et $f_n'(x) = na_n x^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in]-R,R[$. La série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]-R,R[$. Pour appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il suffit de vérifier que la série des dérivées, $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$, converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$. Or, cette dernière série est une série entière de rayon de convergence R d'après la propriété précédente (le facteur x ne modifie pas le rayon de convergence), d'où le résultat. □

Remarque 34

On peut donc dériver terme à terme les séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.
Si la somme commence à $n = 1$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, la dérivée commence aussi à $n = 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$. Le terme constant s'annule.

Ce théorème se généralise pour la classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$:

Théorème 35

La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[, \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Théorème 36 (*corollaire : expression des coefficients d'une série entière*)

On note f la fonction somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Démonstration – Pour tout $x \in]-R,R[$, on a d'après le théorème précédent,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En évaluant en $x = 0$ (ce qui est possible car $R > 0$), on obtient $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$, car seul le terme correspondant à $n = k$ fournit un terme éventuellement non nul. D'où le résultat. □

On en déduit en particulier que les coefficients a_n sont entièrement déterminés par la donnée de la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul. Par exemple, et c'est intuitif, si la somme d'une série entière ne prend que des valeurs réelles, alors on sait que tous les coefficients de cette série entière sont réels, même si l'expression de ces coefficients ne le fait pas clairement apparaître.

Du corollaire précédent, on déduit immédiatement :

Théorème 37 (*Unicité du développement en série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de cv supérieurs ou égaux à un certain $r > 0$. On suppose que pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Application – Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa fonction somme. Alors :

- f est paire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
- f est impaire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$.

Démonstration – Il suffit de traiter le cas où f est paire, l'autre est similaire. Si f est paire, alors pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a donc $a_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne le résultat. La réciproque est claire. □

III Développement en séries entières

1 Série de Taylor

Reprenons la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

on reconnaît des sommes partielles de série entière.
On sait que le petit o tend vers 0 quand x tend vers 0, donc est très proche de 0 sur UN voisinage de 0 qu'on ne connait pas. Ce voisinage est en fait l'intervalle ouvert de convergence de la série entière.
Si on regarde la formuel de Taylor avec reste intégrale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

et qu'on peut montrer que le reste intégrale tend vers 0 pour tout $x \in]-r, r[$ alors la fonction est égale à la somme de sa série du Taylor sur cet intervalle.

Propriété 38

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Démonstration – D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre k pour la fonction $f : t \mapsto e^{zt}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} e^z = f(1) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} z^{k+1} e^{zt}\, dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} z^{k+1} e^{zt}\, dt \right| &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} |z^{k+1}| |e^{zt}|\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} |z^{k+1}|\, e^{\mathcal{R}e(z)t}\, dt \\ &\leqslant |z|^{k+1} e^{|\mathcal{R}e(z)|} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, dt \\ &= |z|^{k+1} e^{|\mathcal{R}e(z)|} \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$, par croissances comparées. On en déduit le résultat par passage à la limite dans la formule de Taylor ci-dessus. □

Définition 39

Soit $r > 0$ et $f :]-r, r[\to \mathbb{K}$,
On dit que f est **développable en série entière** (DSE) sur $]-r, r[$ si f est la somme d'une série entière sur $]-r, r[$.
i.e. S'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ (variable réelle) de rcv $R \geq r$ tq

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple 40

La fonction exponentielle est DSE sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Remarque 41

• La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-r,r[$ mais DSE seulement sur ce voisinage de 0.
• Par unicité des sommes de séries entières, on a unicité du DSE s'il existe.
• Par ce qu'on a vu plus tôt, si f est DSE, alors sur un voisinage de 0, f est la somme de la série entière et on connait les coefficients :

Définition 42

Soit $f :]-r,r[\to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor** de f (en 0) la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque 43

Si une fonction f est DSE, alors elle est somme de sa série de Taylor.
Pour montrer qu'une focntion est DSE la difficulté n'est pas de trouver les coefficients, mais de savoir sur quel domaine la fonction est DSE.
Attention ! Il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière, bien que leur série de Taylor soit convergente !
Contre-exemple classique :
La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et comme $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, on peut la prolonger par continuité en 0 en une fonction continue g en posant $g(0) = 0$.
Mieux, les croissances comparées garantissent que $g(x) = o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ceci est un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g, et implique donc que g est n-fois dérivable en 0 et que $g^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
Ceci étant vrai, on a donc montré que g est indéfiniement dérivable en 0 et que ses dérivées successives en 0 sont toutes nulle.
Pour montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ il suffit donc de montrer que ses dérivées successives sont continues en 0. Pour cela, on montre par récurrence sur n (exercice !) l'existence d'une famille de polynômes (P_n) à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \neq 0 \qquad g^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x^2}$$

Soit n un entier naturel fixé. Par croissances comparées, pour $y \to +\infty$ on a $e^{-y^2} = o(P_n(y))$; la formule ci-dessus implique donc que $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0 = g^{(n)}(0)$. En conséquence, $g^{(n)}$ est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ceci étant vrai pour tout n nous avons donc montré que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
De plus, la série de Taylor de g est la série entière nulle, et possède donc un rayon de convergence infini. Cependant :

$$\forall x \neq 0 \qquad g(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

En conséquence, g ne peut être DSE, car si elle l'était, elle coïnciderait avec sa série de Taylor sur un intervalle de la forme $]-r;r[$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

Théorème 44 (*Opérations sur les DSE*)

Soient f et g deux fonctions DSE au voisinage de 0 : on peut se donner un $r > 0$ et deux séries entières telles que

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \ (\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

2. La fonction fg est DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \ (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

3. Les dérivées successives de f sont DSE et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in]-r, r[, \ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}$$

4. Les primitives successives de f qui s'annulent en 0 sont DSE et

$$\forall x \in]-r, r[, \ F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Remarque 45

On remarque que le rayon de cv de ces séries entières est au moins r.

2 DSE usuels

On connait pour l'instant le DSE d'exponentielle sur $\mathbb{C}$, en prenant les parties réelles et imaginaires de $\exp(ix)$, ou les parties paires et impaires de $\exp(x)$

Propriété 46 (*La série géométrique*)

$z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est DSE sur $B(0,1)$ le disque unité ouvert,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1,\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Théorème 47

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors on reconnaît la formule du binôme de Newton, et l'égalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration – Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, le résultat est connu, il s'agit de la formule du binôme (et c'est en fait une somme finie). Sinon, en posant $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in]-1,1[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série de Taylor de f en 0,

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

a un rayon de convergence égal à 1 d'après la règle de d'Alembert : en effet, α n'étant pas entier naturel, $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)/(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!} \right| = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Notons S la fonction somme de cette série. Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha-n) \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

En séparant ce dernier terme en deux, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) = \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

toutes les séries entières dans l'égalité précédente ayant pour rayon de convergence 1. On reconnaît alors l'égalité

$$S'(x) = \alpha S(x) - x S'(x).$$

La fonction S est donc solution de l'équation différentielle $(1+x)S' = \alpha S$ sur $]-1,1[$.

La fonction $x \mapsto \alpha \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction continue $x \mapsto \dfrac{\alpha}{1+x}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \lambda \exp(\alpha \ln(1+x)) = \lambda (1+x)^\alpha.$$

En remarquant de plus que $S(0) = 1$, on obtient $\lambda = 1$, donc $f = S$ sur $]-1,1[$, ce qui est le résultat souhaité. $\square$

Remarque 48

• La méthode utilisée dans cette démonstration de trouver une équation différentielle que vérifie le DSE pour trouver la fonction (ou réciproquement) est assez classique.
• On reconnaît les formules sur pour les $DL_n(0)$, la différence est qu'on a une égalité sans le o et qu'on sait sur quel intervalle l'égalité est vraie.
• À partir des opérations sur les DSE et les DSE usuels, on peut trouver les DSE de beaucoup de fonctions.

Exemple 49

Donner le DSE de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ et son rayon de cv

IV Applications des DSE

1 Régularité d'une fonction

Si une fonction est DSE au voisinage de 0, alors c'est la somme d'une série entière, donc elle est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Exemple 50

Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2 Calcul d'une somme

Exemple 51

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ satisfait le critère spécial des séries alternées, donc elle est convergente. On en déduit que la somme de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ se prolonge par continuité en $x = 1$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right) = \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

3 Résolution d'équation différentielle

Hors des cadres des théorèmes du cours (grand classique)
On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 suivante :

$$(E): \qquad xy'' - y' + 4x^3 y = 0$$

On ne connaît pas de solutions de cette équation a priori. Une idée consiste à rechercher des solutions DSE sur un voisinage $I_r =]-r; r[$ de 0, c'est-à-dire des fonctions $f : I_r \to \mathbb{C}$ qui vérifient (E) et telles que :

$$\forall x \in I_r \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq r > 0$. Procédons par analyse-synthèse.

— *Analyse :* Si une telle fonction f existe alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I_r et on peut calculer ses dérivées successives en utilisant la formule de dérivation terme-à-terme des sommes de série entière :

$$\forall x \in I_r \qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

Comme f est solution de (E) sur I_r, on a pour tout $x \in I_r$:

$$\begin{aligned}
0 &= xf''(x) - f'(x) + 4x^3 f(x) \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) + 4x^3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^{n+1} \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 4 a_n x^{n+3} \right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) + \left(\sum_{n=3}^{+\infty} 4 a_{n-3} x^n \right)
\end{aligned}$$

$$0 = (2a_2 x + 6a_3 x^2) - (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) + \sum_{n=3}^{+\infty} \left[(n+1)(n-1) a_{n+1} + 4a_{n-3} \right] x^n = \sum_{n=0} b_n x^n$$

où $b_0 = -a_1$, $b_1 = 2a_2 - 2a_20$, $b_2 = 3a_3$ et pour tout $n \geq 3$, $b_n = (n+1)(n-1)a_{n+1} + 4a_{n-3}$. Par unicité du développement en série entière (de la fonction identiquement nulle ici), on en déduit que les coefficients b_n sont tous nuls. Ainsi :

$$a_1 = a_3 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3, \quad a_{n+1} = -\frac{4a_{n-3}}{(n+1)(n-1)}$$

Par récurrence, on montre facilement que tous les coefficients d'ordre impairs a_{2n+1} sont nuls. De plus, on a les relations de récurrence

$$a_{4n+4} = -\frac{4a_{4n}}{(4n+4)(4n+2)} = -\frac{a_{4n}}{(2n+2)(2n+1)} \quad \text{et} \quad a_{4n+2} = -\frac{4a_{4n-2}}{(4n+2)(4n)} = -\frac{a_{4n-2}}{(2n+1)(2n)}$$

dont on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{4n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0 \quad \text{et } a_{4n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_2$$

Mais alors, en séparant les contributions modulo 4 du DSE de f on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n} + a_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2} = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2)$$

— *Synthèse :* Soit a, b deux réels et $f : x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$. Alors on vérifie facilement que f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous avons ainsi déterminé toutes les solutions de (E) qui sont développables en série entière.

Réciproquement, on peut trouver une équation différentielle vérifiée par une fonction f pour trouver son DSE :

Méthode.

- Trouver une équation différentielle vérifiée par f ;
- On suppose qu'il existe une solution DSE de cette équation différentielle sur $]-R, R[$: $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  Trouver une relation de récurrence sur les coefficients a_n et les calculer.
- Chercher le rayon de convergence de la série entière g et montrer que $R > 0$.
- Justifier que $g = f$ en utilisant que l'équation différentielle avec condition(s) initiale(s) possède une unique solution sur $]-R, R[$.

Exemple 52

Montrer que $f : \begin{cases}]-1, 1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(\alpha \arcsin(t)) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est DSE.