DS n°1

Le 17 septembre 2021

Durée : 3h.

Tout matériel électronique est interdit.

On apportera un soin tout particulier à la qualité du fond (rigueur, précision et concision) et de la forme (phrases entières, orthographe, écriture lisible, pas de rature, etc.). Les résultats de chaque question traitée doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.
Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

Ce sujet comprend des questions et deux problèmes qui sont indépendants.

Questions diverses

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est convergente. Par un changement de variable $u = \sqrt{t}$ en déduire la valeur de l'intégrale.
2. On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}\ \ [X], \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$
Justifier que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que l'application $u : P \mapsto XP'(2X+1)$ définit un endomorphisme de $R_2[X]$ puis donner sa matrice dans la base canonique.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$, justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = (\sin(x))^n \cos(x)$. Sur quel intervalle et vers quelle fonction la suite de fonctions (f_n) converge simplement ?

Problème 1

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3,...
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.
À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.
À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarque que X_n peut prendre les valeurs $0, 1$ et 2, c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.
   Déterminer la variance de X_0.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur sans justification des probabilités conditionnelles suivante :
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$
$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$
4. Soit $n \geq 0$, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$.
5. Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance des X_n sans chercher leur loi.
On introduit les matrices de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

$$L_1 = (0 \ \ 1 \ \ 2) \quad \text{et} \quad L_2 = (0 \ \ 1 \ \ 4).$$

6. Calcul de l'espérance :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.
   (b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = \frac{1}{2} E(X_n)$.
   (c) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.
7. Calcul du moment d'ordre 2 :
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.
   (b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :
$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4} E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   (d) On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$
   (e) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = E(X_n^2) - u_n$.
   Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   (f) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n.
8. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n.

Problème 2

NB : le problème suivant comporte quatre parties relativement indépendantes les unes des autres. Plus précisément :

— *la partie II est indépendante de la partie I ;*

— *la partie III n'utilise que le résultat (donné dans la question) de la question 10 ;*

— *la partie IV utilise les résultats de la partie III.*

On pose la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

Partie I : étude de f

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ est convergente.
2. Justifier que le domaine de définition de f est $\mathcal{D} =]-1,1[$, et montrer qu'il s'agit d'une fonction impaire.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, et en déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.
4. En déduire la position relative du graphe de f et de sa tangente en 0 au voisinage de 0. On fera notamment un schéma.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a $\dfrac{1}{1-t^2} \geq \dfrac{1}{2(1-t)}$. En déduire que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
6. Dresser le tableau de variation complet de f, et donner l'allure de son graphe.
7. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{\alpha}{1-t} + \dfrac{\beta}{1+t}$ pour deux constantes α et β que l'on déterminera.
   En déduire une expression de f.
8. Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y' + y = (1-t^2)^{3/2}$ sur $]0,1[$.

Partie II : une famille de polynômes

9. Justifier que f est infiniment dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}$, et donner l'expression de $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$. On montrera notamment que pour $n = 1, 2, 3$, on a $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}$, où P_1, P_2 et P_3 sont trois polynômes que l'on déterminera.
   NB : à ce stade, on doit trouver $P_1 = 1$, $P_2 = 2X$ et $P_3 = 6X^2 + 2$.
10. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n} \qquad (E_n)$$

   et qui vérifie pour tout $n \geq 1$ la relation $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + 2nXP_n$.
11. Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n est le seul polynôme qui vérifie (E_n).
12. Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.

Partie III : recherche des racines complexes de P_n

13. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$P_n = \frac{(n-1)!}{2}\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big).$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence :

$$\Big(\alpha \text{ racine de } P_n\Big) \Longleftrightarrow \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ est une racine } n\text{-ième de l'unité}\right)$$

15. En déduire que les racines complexes de P_n sont les

$$x_k = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad , \text{ où } k \in [\![1, n-1]\!] \ , \ \text{ et } \ \mathrm{cotan} = \frac{\cos}{\sin}.$$

16. En déduire la décomposition primaire de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

17. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x_k$.

Partie IV : somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Dans cette partie, on étudie plus particulièrement les polynômes $(P_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(x_k)_{1\leq k\leq 2n}$ les racines de P_{2n+1}.
    (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_{2n+1-k} = -x_k$.
    (b) A l'aide de la factorisation de P_{2n+1}, en déduire qu'il existe $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2n+1} = R_n(X^2)$ (on donnera R_n sous forme factorisée).
    NB : $R_n(X^2)$ ne désigne pas un produit, mais le polynôme composé "R_n de X^2".

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant la question 13, montrer que $R_n = (2n)! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.
    (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

20. (a) Montrer que $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(t) \leq t \leq \tan(t)$.
    (b) En déduire que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \mathrm{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \mathrm{cotan}^2(t)$.
    (c) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
    En appliquant l'encadrement précédent à $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, établir un encadrement de S_n.
    (d) En déduire que S_n tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ lorsque $n \to +\infty$.