DS n°1 - PSI

Vendredi 18 septembre 2020

Durée : 3h.

Tout matériel électronique est interdit.

On apportera un soin tout particulier à la qualité du fond (rigueur, précision et concision) et de la forme (phrases entières, orthographe, écriture lisible, pas de rature, etc.). Les résultats de chaque question traitée doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.
Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Questions de cours :

1. Énoncer le critère de d'Alembert.
2. Dire sur quel intervalle la série de fonctions $\sum f_n$ converge, et vers quelle fonction, en notant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.
3. Soit E, F des $\mathbb{K}$-ev, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 1 :

Lorsque cela est défini, on note $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On montre ici par deux méthodes que $I(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence de $I(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Méthode 1 pour le calcul :
   (a) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que
   $$\forall x \neq 0 \qquad I(x) = x - x^2 I(x)$$
   (b) Conclure.
3. Méthode 2 pour le calcul :
   (a) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{\alpha t}$
   (b) Calculer $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.

Exercice 2 :

Partie I :

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 puis montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer f' sur D puis prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D'.
4. Étudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$.

Partie II :

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante

$$L = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur de L. Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes :

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} \quad \text{et} \quad Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n^2}$$

5. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
6. Justifier : $\forall t \in [0,1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$
7. En déduire : $\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

8. Établir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
9. Comparer pour tout $x \in]0,1]$: $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
10. En notant g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :

$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

    En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

11. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Exercice 3 :

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par sa matrice représentative dans la base canonique : $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$. Que peut-on en déduire sur f ?
2. On pose $N = \ker(f)$ et $I = \mathrm{Im}(f)$. Déterminer une base de ces deux sev.
3. Montrer que N et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et que $N = I^{\perp}$.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $N \oplus I$, puis une BON $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe.
5. Calculer la distance entre le vecteur e_1 et le sev I.
6. Montrer que tous les vecteurs $x \in I$ vérifient $f(x) = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer (*on pourra par exemple se servir de la base de I déterminée question* 2). En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
7. Conclure que f est la composée d'un projecteur orthogonal et d'une homothétie, dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 4 :

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: si $k_1, \ldots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.
Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note $\{X_1, \ldots, X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1, \ldots, X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(U_2)$.
2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.
   (a) Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
   On pourra utiliser la fonction `random.randint`.
   L'instruction `random.randint(1,25)` fournit un nombre aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.

(b) Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?
4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?
5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.
6. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.
7. Justifier

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))$$

9. Montrer que $\mathbb{E}(U_n) = \ell\Big(1 - (1 - \dfrac{1}{\ell})^n\Big)$.
10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.
11. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.
12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

    Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

    (a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.

    (b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.