DS n°1 - PSI

Vendredi 18 septembre 2020

Durée : 3h.

Tout matériel électronique est interdit.

On apportera un soin tout particulier à la qualité du fond (rigueur, précision et concision) et de la forme (phrases entières, orthographe, écriture lisible, pas de rature, etc.). Les résultats de chaque question traitée doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.
Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Questions de cours :

1. Énoncer le critère de d'Alembert.
2. Dire sur quel intervalle la série de fonctions $\sum f_n$ converge, et vers quelle fonction, en notant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.
3. Soit E, F des $\mathbb{K}$-ev, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $\ker(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 1 :

Lorsque cela est défini, on note $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

On montre ici par deux méthodes que $I(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence de $I(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Méthode 1 pour le calcul :
   (a) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que
   $$\forall x \neq 0 \qquad I(x) = x - x^2 I(x)$$
   (b) Conclure.
3. Méthode 2 pour le calcul :
   (a) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{\alpha t}$
   (b) Calculer $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.

Solution :

On montre ici par deux méthodes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}\ \mathrm{d}t = \dfrac{x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé.

— Méthode 1 : On dispose de la majoration suivante :

$$\forall t \geq 0 \qquad |\sin(xt)e^{-t}| = |\sin(xt)|e^{-t} \leq e^{-t}$$

Or la fonction de référence $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$. Par comparaison, la fonction continue $t \mapsto \sin(xt)e^{-t}$ l'est aussi.

Remarque :

Autrement dit, $I(x)$ est une intégrale absolument convergente, et donc convergente.

Posons $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u, v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad u'(t) = x\cos(xt)\text{et} \quad v'(t) = e^{-t}$$

De plus, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ et que sin est bornée, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \underbrace{\sin(xt)e^{-t}}_{u(t)v(t)} = 0$.

Ainsi, la valeur dans le crochet $[uv]_0^X$ converge avec

$$\lim_{X\to+\infty} [uv]_0^X = \left(\lim_{+\infty} uv\right) - u(0)v(0) = 0 - 0 = 0$$

Par ailleurs,l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$ est elle aussi convergente et on a la formule d'IPP :

$$I(x) = 0 - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x\cos(xt)e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties en définissant des fonctions f, g :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad f(t) = x\cos(xt) \quad \text{et} \quad g(t) = -e^{-t}$$

Elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et par les mêmes calculs on obtient

$$I(x) = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X x\cos(xt)e^{-t}\ \mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} [fg]_0^X - \lim_{X\to+\infty} \int_0^X f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t + = x - \int_0^{+\infty} x^2\sin(xt)e^{-t}$$

D'où l'on tire $\boxed{I(x) = x - x^2 I(x)}$, puis $\boxed{I(x) = \dfrac{x}{1+x^2}}$.

— Méthode 2 : Posons $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\ \mathrm{d}t$. En remarquant que

$$\forall t \in [0;+\infty[\qquad |e^{ixt}e^{-t}| = e^{-t}$$

on constate que $J(x)$ est absolument convergente car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, $H : t \mapsto \dfrac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}$ est une primitive de $h : t \mapsto e^{ixt}e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$J(x) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A h(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} H(A) - H(0)$$

Or $|H(A)| = \dfrac{e^{-A}}{|ix-1|}$ donc $\lim\limits_{+\infty} H(A) = 0$ et par suite $\boxed{J(x) = -H(0) = \dfrac{1}{1-ix} = \dfrac{1+ix}{1+x^2}}$.

Enfin, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} Im(h(t))\ \mathrm{d}t = Im\left(\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t\right) = Im(J(x)) = \boxed{\dfrac{x}{1+x^2} = I(x)}$.

Exercice 2 :

Partie I :

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 puis montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer f' sur D puis prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D'.
4. Étudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$.

Partie II :

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante

$$L = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur de L. Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes :

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} \quad \text{et} \quad Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n^2}$$

5. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
6. Justifier : $\forall t \in [0,1]$, $\quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$
7. En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $\quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$, $\quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

8. Établir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$, $\quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
9. Comparer pour tout $x \in]0,1]$: $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
10. En notant g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :

$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

    En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

11. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Solution :

Partie I :

1. Par opérations, f est définie en tout réel x vérifiant $x \neq 0$ et $1+x>0$.
   Ainsi, f est définie sur $\boxed{\text{sur }]-1,0[\cup]0,+\infty[}$

2. On a $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \text{ lorsque } x \to 0}$

   Or, pour tout réel $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \to 1$ alors f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$.

3. D'après la question précédente, on a :

$$f(x) = f(0) - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$$

   lorsque x tend vers 0. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

   En conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \dfrac{-1}{2}}$.

   Remarque :

   On peut aussi lire directement dans le DL à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

   Pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations et $\boxed{f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \text{ sur } D}$.

   Il reste à montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{x - (1+x)\left(x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\mathrm{o}(1)\right)}{x^2(1+x)} \\
&= \frac{x^2\left(-1 + \dfrac{1}{2}\right) + x^2\,\mathrm{o}(1)}{x^2(1+x)} \\
&= \frac{-\dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)}{1+x} \to \frac{-1}{2} = f'(0)
\end{aligned}$$

   Remarques :

   On peut aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée, plutôt que de repasser par la définition.

   En conclusion, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,0[\cup]0,+\infty[\text{ et en } 0 \text{ donc sur } D'}$

4. Pour tout $x \in D$: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = f'(x) = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

   On pose $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$ le numérateur de f'.

k est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1,+\infty[$: $k'(x) = 1-\ln(1+x)-\dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$.

Or $\ln(1+x) > 0 \iff 1+x > 1 \iff x > 0$ donc on obtient le tableau :

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$	
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$		$-$	$-1/2$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

En -1^+ : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) \to -\infty}{x \to -1} \to +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(x(1+1/x))}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 0$ car $\ln(x) = \mathrm{o}(x)$ en $+\infty$

Partie II :

5. Comme f est continue sur $[0,1]$ $\boxed{\text{l'intégrale est bien définie}}$.
6. Soit $t \in [0,1]$:

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$$

car $-t \neq 1$.

7. L'égalité précédente étant vraie pour tout $t \in [0,x]$, car $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1}\mathrm{d}t \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n\right]_0^x \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.}$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.$

8. Soit $x \in [0,1]$. On a, d'une part :

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$$

et, d'autre part, $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$ pour tout $0 \leq t \leq x$ donc

$$\frac{t^n}{1+t} \leq t^n \quad \text{et} \quad |R_n(x)| \leq= \frac{1}{n+1} x^n$$

En conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \int_0^x t^n dt = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}$

9. Pour tout $x \in]0,1]$: $Q_n'(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{n-1}}{n} = \dfrac{P_n(x)}{x}$

   donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1] : Q_n'(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}}$

10. On note g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$.

    On considère un réel $x \in]0,1]$.

    Comme $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ ainsi que $\dfrac{P_n(x)}{x} \to 1$, alors $g_n(x) \to 0$ quand x tend vers 0,

    et g_n est continue en 0 et donc pour tout $x \in [0,1]$: $Q_n'(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}$ donc Q_n est une primitive de $x \to \dfrac{P_n(x)}{x}$ et 1 si $x = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [Q_n(t)]_{t=0}^1 - L \\
&= Q_n(1) - Q_0(0) - L \\
&= Q_n(1) - L
\end{aligned}$$

    puis on enchaîne les inégalités :

$$|Q_n(1) - L| = \left| \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \text{ car } 0 \leq 1.$$

    Il reste à majorer $|g_n(x)|$ pour majorer ensuite l'intégrale.

    On reprend la question 3 : $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$. donc

    $P_n(x) - \ln(1+x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$. et $\dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = -\dfrac{1}{x} R_n(x)$

    Donc $|g_n(x)| = \left| \dfrac{P_n(x) - \ln(1+x)}{x} \right| \leq \left| \dfrac{1}{x} R_n(x) \right| \leq \dfrac{1}{x} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \dfrac{x^n}{n+1}$ d'après la question 4 et finalement

$$\int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

    On a donc $0 \leq |Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et par encadrement $|Q_n(1) - L| \to 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n(1) = L}$

11. La quantité $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} lorsque $|Q_N(1) - L| \leq 10^{-4}$ donc si $\dfrac{1}{(N+1)^2} \leq 10^{-4}$

    $\boxed{\text{La valeur approchée est donc atteinte pour } N = 99}$

Exercice 3 :

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par sa matrice représentative dans la base canonique : $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$. Que peut-on en déduire sur f ?
2. On pose $N = \ker(f)$ et $I = \mathrm{Im}(f)$. Déterminer une base de ces deux sev.
3. Montrer que N et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et que $N = I^{\perp}$.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $N \oplus I$, puis une BON $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe.
5. Calculer la distance entre le vecteur e_1 et le sev I.
6. Montrer que tous les vecteurs $x \in I$ vérifient $f(x) = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer (*on pourra par exemple se servir de la base de I déterminée question* 2). En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
7. Conclure que f est la composée d'un projecteur orthogonal et d'une homothétie, dont on précisera les éléments caractéristiques.

Solution :

1. En réalisant l'opération $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ sur les colonnes, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc f n'est pas un isomorphisme.

2. ▶ Déterminons une base de N. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
x \in N \iff f(x) = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \boxed{-x_1} & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} & 3x_2 & -3x_3 & = & 0 & \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 & \\ & 3x_2 & -3x_3 & = & 0 & \text{(ligne inutile)} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array} \right. \\
&\iff x \in \mathrm{Vect}(b_1) \quad \text{avec } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ces équivalences montrent que (b_1) est une base de N.

▶ Déterminons une base de I. Par le théorème du rang, $\dim(I) = 3 - 1 = 2$.
On sait par ailleurs que les colonnes de A sont génératrices de $\mathrm{Im}(A)$. Or, les deux

premières colonnes $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont libres. Donc (b_2, b_3) est une base de I.

3. *Remarque : on pourrait commencer par montrer $N \oplus I = \mathbb{R}^3$, par exemple en montrant que la famille (b_1, b_2, b_3) est libre (et donc une base de $\mathbb{R}^3$) et en utilisant le thm de la base adaptée. Mais puisqu'il faudra démontrer que $N = I^\perp$, autant commencer par cela puisque cela implique automatiquement que N et I sont supplémentaires.*

   Montrons $N = I^\perp$. Tout d'abord, $\dim(N) = 1$ et comme $I^\perp$ est un supplémentaire de I, $\dim(I^\perp) = 3 - \dim(I) = 3 - 2 = 1$. Ces deux sev ont donc même dimension.
   Il suffit donc de montrer que $N \subset I^\perp$.

   $$\text{Or :} \quad (b_1 \mid b_2) = 2 - 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (b_1 \mid b_3) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

   Donc par bilinéarité du produit scalaire, b_1 est orthogonal à tous les vecteurs de I (car ils sont des CL de b_2 et b_3). Autrement dit, $b_1 \in I^\perp$. Et par stabilité par CL, tout vecteur de N (qui est donc proportionnel à b_1) appartient à $I^\perp$.

   On a donc bien $N \subset I^\perp$, et par égalité des dimensions, $N = I^\perp$. Cela implique par théorème que $N \oplus I^\perp = \mathbb{R}^3$.

4. Par construction, $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2, b_3)$ convient.
   Pour $\mathcal{B}_2$, il suffit de :
   - déterminer une BON de N :

   $$\text{le vecteur } \hat{b_1} = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{convient.}$$

   - déterminer une BON de I (orthonormalisation de Gram-Schmidt) :
     - On pose $\hat{b_2} = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
     - On pose :

   $$\begin{aligned} \tilde{b_3} &= b_3 - (b_3 \mid \hat{b_2})\hat{b_2} \\ &= b_3 - \frac{1}{6}(b_1 \mid b_2) b_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

     puis $\hat{b_3} = \frac{\tilde{b_3}}{\left\|\tilde{b_3}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Finalement, $\mathcal{B}_2 = (\hat{b_1}, \hat{b_2}, \hat{b_3})$ est une BON de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $N \oplus I$.

5. On note p_N et p_I les projecteurs orthogonaux sur N et I. Il s'agit de calculer :

   $$\mathrm{d}(e_1, I) \;=\; \|e_1 - p_I(e_1)\| \;=\; \|p_N(e_1)\|.$$

Or, $p_N(e_1) \;=\; (e_1 \mid \hat{b_1})\hat{b_1} \;=\; \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $d(e_1, I) \;=\; \|p_N(e_1)\| \;=\; \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;=\; \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

6. (b_2, b_3) est une base de I. On calcule :

$$f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3b_2$$

et de même, $f(b_3) = 3b_3$.
Cela implique que $\forall x \in I,\ f(x) = 3x$. En effet, x est de la forme $\lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$, donc :

$$f(x) \;=\; \lambda_2 \underbrace{f(b_2)}_{=3b_2} + \lambda_3 \underbrace{f(b_3)}_{=3b_3} \;=\; 3(\lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) \;=\; 3x.$$

Remarque : argument plus théorique pour montrer la même chose : b_2 *et* b_3 *appartiennent à* $\ker(f - 3Id)$*, donc par stabilité par CL,* $Vect(b_2, b_3) \subset \ker(f - 3Id)$*.*

Dans la base $\mathcal{B}$, on a donc :

$$\begin{cases} f(b_1) = 0 \\ f(b_2) = 3b_2 \\ f(b_3 = 3b_3 \end{cases} \qquad \text{donc :} \quad (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. On a :

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = (3I_3) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M}.$$

Or :

- $3I_3$ est la matrice qui représente (dans la base $\mathcal{B}$ comme dans toutes les bases) l'homothétie de rapport 3, notée h.
- M est la matrice qui représente dans la base $\mathcal{B}$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(b_2, b_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(b_1)$. En effet, il vaut Id sur $\mathrm{Vect}(b_2, b_3)$ et 0 sur $\mathrm{Vect}(b_1)$.
Autrement dit, il s'agit de la matrice représentative de p_I dans la base $\mathcal{B}$.

Conclusion : par correspondance (produit matriciel)-(composition des endomorphismes), on a $\boxed{f = h \circ p_I}$.

Exercice 4 :

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: si $k_1, \ldots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.
Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note $\{X_1, \ldots, X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1, \ldots, X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(U_2)$.
2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.
   (a) Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
   On pourra utiliser la fonction `random.randint`.
   L'instruction `random.randint(1,25)` fournit un nombre aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.
   (b) Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.
3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?
4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?
5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.
6. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.
7. Justifier
$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$
   où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.
8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:
$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n))$$
9. Montrer que $\mathbb{E}(U_n) = \ell\Big(1 - (1 - \dfrac{1}{\ell})^n\Big)$.
10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.
11. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

(a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.

(b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. (a) Pour tout événement ω , $U_2(\omega) = |\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}|$ et selon que $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ soient égaux ou non , on a : $U_2(\omega) = 1$ ou $U_2(\omega) = 2$, conclusion: $\boxed{U_2(\Omega) = \{1, 2\}}$

   (b) On a : $P(U_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{\ell} P(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{\ell} (\frac{1}{\ell})^2$ par indépendance de X_1 et X_2. Conclusion: $\boxed{P(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell}}$

   Avec le (a), on en déduit que $\boxed{P(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}}$

   (c) On a $\mathbf{E}(U_2) = 1 \times \frac{1}{\ell} + 2 \times (1 - \frac{1}{\ell}) = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où : conclusion: $\boxed{\mathbf{E}(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}}$

2. (a)
```
from random import *
def simulU():
    T=[]
    for i in range(10):
        t=randint(1,25)
        if t not in T:
            T.append(t)
    return len(T)

def simulUbis(): # autre version possible de simulU
    S={randint(1,25) for i in range(10)}
    return len(S)
```
   (b)
```
def espU(nb_simulation):
    s=0
    for i in range(nb_simulation):
          s=s+simulU()
    return s/nb_simulation
```

Le théorème qui justifie cela est la loi faible des grands nombres. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **VADR 2 à 2 indépendantes** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que les **VADR** suivent toutes la loi de U_{10} . Posons $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $m = \mathbf{E}(U_{10})$ et $\sigma = \sigma(U_{10})$. On a , avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

3. On a $\boxed{U_n(\Omega) = \{1, \ldots, \min(n, \ell)\}}$

4. On a : $(X_i \in S) = \bigcup_{s \in S} (X_i = s)$ (réunion disjointe) , comme $P(X_i = s) = \dfrac{1}{\ell}$ (loi uniforme) on conclut :

$$\boxed{P(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}}$$

5. On a : $(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \neq a)$ et comme les X_i sont indépendantes, on conclut à l'aide du 4. pour $S = \{1, \ldots, \ell\} - \{a\}$: $\boxed{P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \left(\dfrac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$

6. Appliquons la formule des probas totales avec le système complet $(X_n = a)_{a \in \{1, \ldots, \ell\}}$:

$$P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} P\Big((X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) \Big/ X_n = a\Big) P(X_n = a)$$

$= \displaystyle\sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a / X_n = a) = \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) P(X_n = a)$ car $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ et X_n sont indépendants.

On a donc $P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \displaystyle\sum_{a=1}^{\ell} \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\ell} = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1} \times \frac{\ell}{\ell}$.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \left(\dfrac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$

7. On a $(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \displaystyle\bigcup_{S \in \mathcal{P}_\ell} \Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe), donc $P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big((\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \cap (X_n \notin S)\Big)$.

Avec le lemme des coalitions , $(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S)$ et $(X_n \notin S)$ sont indépendants, on en déduit que $P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) P\Big((X_n \notin S)\Big)$.

On conclut avec le 4. :

$$\boxed{P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big)}$$

8. On partitionne $\mathcal{P}_\ell$ à cardinal constant :

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big)$$

or $\displaystyle\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) = P(U_{n-1} = k)$. On a donc

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S\Big) \Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) \Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) \Big(1 - \frac{k}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) - \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} k P(U_{n-1} = k) = 1 - \frac{1}{\ell} \mathbf{E}(U_{n-1}).$$

Avec le 7. , on a donc $1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{E}(U_{n-1}) = P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$.

Conclusion: $\boxed{\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n))}$

9. Avec le 6. et le 8., on a directement que $\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^{n-1}\Big)$ d'où en décalant :

   conclusion: $\boxed{\mathbf{E}(U_n) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^n\Big)}$

10. La suite géométrique $((1-\frac{1}{\ell})^n)$ est de raison q avec $0 < q < 1$, on en déduit immédiatement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = \ell}$.

    Si n est très grand par rapport à ℓ alors pour chaque valeur de $[\![1, \ell]\!]$ l'une des X_i prendra cette valeur et donc toutes les valeurs de $[\![1, \ell]\!]$ seront atteintes et on aura $U_n = \ell$ presque à chaque tirage.

11. De l'équivalent $1-(1-x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on en déduit que $\mathbf{E}(U_n) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \ell \times \frac{n}{\ell}$. On en conclut : $\boxed{\lim\limits_{\ell\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = n}$

    Si ℓ est très grand face à n , les $X_1, \ldots, X_n$ se placeront sur n valeurs du grand intervalle $[\![1, \ell]\!]$ et ces valeurs seront certainement 2 à 2 distinctes.

12. (a) Ici $\ell = 365$ et la i-ème personne est représentée par la variable X_i. Le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes est donc U_n avec $\ell = 365$.

    Conclusion: $\boxed{\text{Ce nombre moyen est donc égal à } \mathbf{E}(U_n) = 365\Big(1 - (\frac{364}{365})^n\Big)}$

    (b) On a immédiatement avec le 10. , $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = 365}$.