Exercice 1 : Séries de Fourrier (ATS 2023 Exercice 3)

On définit la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi;\pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in [-\pi;\pi[, \quad f(t) = t\cos t.$$

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourrier de la fonction f.

a) Calculer les coefficients a_n, pour $n \geqslant 0$.

b) Calculer le coefficient b_1. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$ *pour tout réel* t.

c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier $n \geqslant 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$$

3) **a)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left(f(t+h) + f(t-h)\right).$

b) Montrer que la série de Fourrier Sf converge vers f. Énoncer le théorème utilisé.

4) **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

c) En déduire que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{4}.$

5) **a)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt$. *On rappelle que* $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* t.

b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, trouver la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : Programmation (ATS 2023 Exercice 4)

1) Écrire une fonction `calculSomme`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n non nul, et renvoie la valeur $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$

2) On admet que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Écrire une fonction `approx`, en *Scilab* ou en bien pseudo-code, qui prend en entrée un réel `eps` strictement positif, et renvoie une approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à `eps` près.