DM n°2

À rendre le lundi 14 septembre

Exercice 1. Dire sur quel intervalle et vers quelle fonction convergent simplement les suites de fonctions (f_n) définies par :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ 2. $f_n(x) = x(1+n^2e^{-nx})$ 3. $f_n(x) = (\sin(x))^n\cos(x)$

Solution :

1. Soit $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout n, $f_n(0) = 1$.
   Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction indicatrice de 0 qu'on note $\mathbb{1}_0$: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$
   Soit $x > 0$, par croissance comparée, $\lim f_n(x) = x$
   Soit $x < 0$, $\lim f_n(x) = -\infty$.
   Ainsi, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVS}}{\longrightarrow}} (x \mapsto x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$,
   $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $\sin(x) \in]-1,1[$.
   Si $x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors $f_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, c'est-à-dire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soi $\alpha > 1$, et $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ le reste d'ordre n de la série de Riemann convergente.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
2. ($\star$) Par une comparaison série/intégrale, en déduire un équivalent de R_n.

Solution :

1. Soit $x \geq n$,
   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[n, x]$ et on peut calculer son intégrale I_x :
   $$I_x = \int_n^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_n^x = \frac{1}{(1-\alpha)}\left(x^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right)$$
   Cette valeur admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ donc l'intégrale converge et
   $$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} I_x = \frac{-n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} = \frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}$$

2. On va utiliser une comparaison série/intégrale :
   Soit $k \geq 2$, soit $t \in [k, k+1]$, alors

$$k \leq t \leq k+1$$

   donc $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On intègre entre k et $k+1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

   On somme pour k allant de $n+1$ à $N \geq n+1$ en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

   On a un premier côté de l'encadrement voulu : $\int_n^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$
   Sur la somme de gauche on fait le changement d'indice $k \leftarrow k-1$:
   $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$
   Donc on a le second encadrement $\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t + \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.
   Puis comme tout est convergent, on fait finalement tendre N vers $+\infty$ (ce qui conserve les inégalités larges) et on obtient l'encadrement :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t + \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

   Soit en remplaçant avec le résultat obtenu en question 1 :

$$\frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

   Finalement, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}} = 0$, on a par le théorème des gendarmes que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}$$