DM n°1

À rendre le lundi 7 septembre

Exercice 1. Donner la nature des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$1.\ u_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad 2.\ u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} \qquad 3.\ u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \qquad 4.\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Solution :

1. $u_n \sim \frac{1}{n}$, donc la STP $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.
2. $u_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \sim \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{-n}$. Ainsi, par comparaison à une série géométrique convergente, car de raison $\frac{1}{e} \in [0, 1[$, la STP $\sum u_n$ est convergente.
3. $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
   Or $\lim \frac{1}{n}\ln(n) = 0$ par croissance comparée, donc $\exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim 1$ par continuité d'exponentielle, et $u_n \sim \frac{1}{n}$.
   Ainsi, cette STP diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.
4. Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ décroit vers 0, la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 2. Après avoir justifié qu'elles convergent, calculer la somme des séries suivantes :

$$1.\ \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad 2.\ \sum \frac{n+1}{n!} \qquad 3.\ \sum x^n \exp(n), \text{selon les valeurs de } x \in \mathbb{R}_+$$

Solution :

1. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$, donc la STP $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
   De plus, on peut trouver des réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$
   En mettant au même dénominateur, on trouve
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right)$$
   on reconnait deux téléscopages.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On a montré $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

2. $\lim n^2 \times \dfrac{n+1}{n!} = 0$, donc $\dfrac{n+1}{n!} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la STP converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

   Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \exp(1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + e \quad \text{par changement d'indice } n \leftarrow n+1 \text{ dans la première somme} \\
&= 2e
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

   Comme $x^n \exp(n) = (xe)^n$, on reconnait une série géométrique.

   $xe \in]-1, 1[\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, et comme $x \geq 0$, la série converge ssi $x \in [0, \frac{1}{e}[$ avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \exp(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{1-ex} \text{ si } x \in]0, \dfrac{1}{e}[\end{cases}$$

   Dans les autres cas, ie. si $x \in [\frac{1}{e}, +\infty[$, la STP diverge vers $+\infty$ par le théorème de la limite monotone.