DM n°0

À rendre le 2 septembre 2021

---

1 Analyse

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}$ une fonction réelle.

1. Donner le domaine de définition de f.

Solution :

La fonction f est définie ssi $\begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} > 0 \\ \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sin(x) \text{ non nul et } \sin(x) \text{ est du signe de } x \\ \dfrac{\sin(x)}{x} \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}_+ \cap \{]2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}\} \text{ ou } x \in \mathbb{R}_- \cap \{]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}\} \\ x \neq 0 \end{cases}$

Ainsi, le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = (\mathbb{R}_+ \cap \{]2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}\}) \bigcup (\mathbb{R}_- \cap \{]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}\})$$

2. Montrer que le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 est $f(x) = -6 + \dfrac{x^2}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

Solution :

Au voisinage de 0 :

$\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \ln(1+u) \qquad \text{avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ &= -\frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi

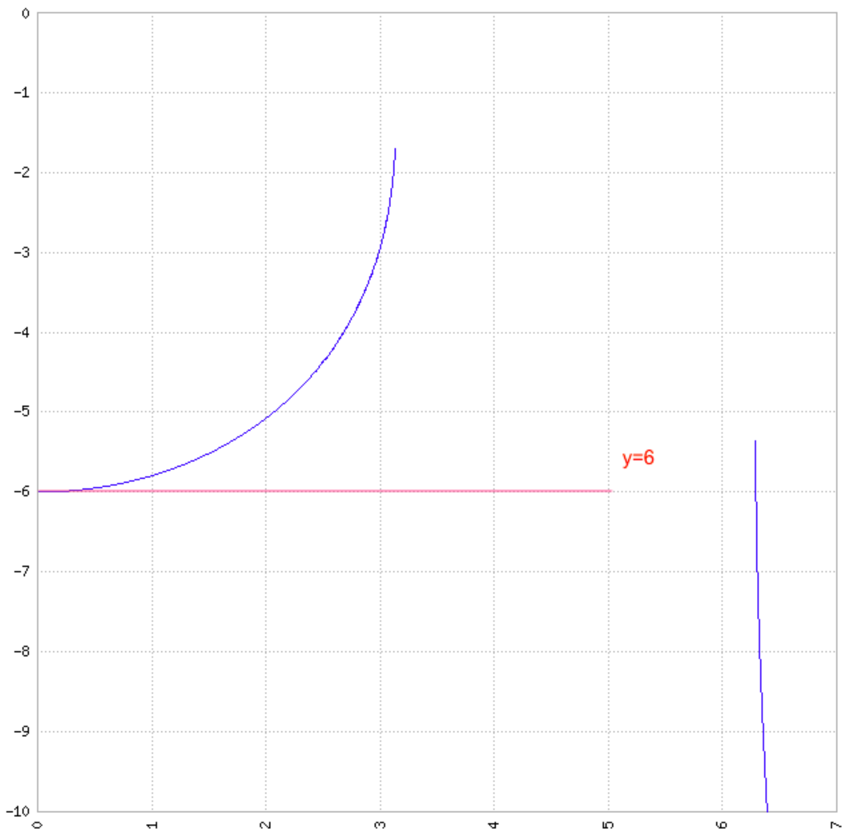
$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)} &= \frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{x^2}{180}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\\
&= -6\times\frac{1}{1+\frac{x^2}{30}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\\
&= -6\times\frac{1}{1+u} \qquad \text{avec } u=\frac{x^2}{30}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\\
&= -6(1-u+\underset{u\to 0}{o}(u))\\
&= -6(1-\frac{x^2}{30}+\underset{x\to 0}{o}(x^2))\\
&= -6+\frac{x^2}{5}+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \ \text{ par parité de } f
\end{aligned}
$$

3. En déduire l'équation de la tangente à f en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Solution :

f admet en 0 la tangente d'équation $y=-6$ (tangente horizontale). Le premier terme non nul après l'ordre 1 est $\frac{x^2}{5}>$ au voisinage de 0, donc la courbe est au dessus de la tangente.

On le voit d'ailleurs sur ce tracé de la courbe représentative de la fonction sur une partie de son ensemble de définition.



2 Algèbre linéaire

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3y + 2z, -2x + 5y + 2z, 2x - 3y) \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Solution :
φ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, montrons qu'elle est linéaire.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x + a \\ \lambda y + b \\ \lambda z + c \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda X + Y) &= \varphi(\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c) \\
&= (3(\lambda y + b) + 2(\lambda z + c), -2(\lambda x + a) + 5(\lambda y + b) + 2(\lambda z + c), 2(\lambda x + a) - 3(\lambda y + b)) \\
&= \lambda(3y + 2z, -2x + 5y + 2z, 2x - 3y) + (3b + 2c, -2a + 5b + 2c, 2a - 3b) \\
&= \lambda\varphi(x, y, z) + \varphi(a, b, c) = \lambda\varphi(X) + \varphi(Y)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

2. Justifier que la matrice de φ dans la base canonique est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :
$\varphi((1, 0, 0)) = (0, -2, 2)$
$\varphi((1, 0, 0)) = (3, 5, -3)$ Ainsi, $\mathcal{M}at_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi) = A$
$\varphi((1, 0, 0)) = (2, 2, 0)$

3. Calculer le déterminant de A. Montrer que φ est un automorphisme.

Solution :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$ par développement par rapport à la première colonne.

$$= 2(0 - (-6) + 6 - 10) = 4 \neq 0$$

Ainsi φ est un endomorphisme bijectif, c'est donc un automorphisme.

4. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, et en déduire l'inverse de A.

Solution : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$

Alors $\frac{-1}{2}(A^2 - 3A) = I_3 \Leftrightarrow A(\frac{-1}{2}(A - 3I_3)) = I_3$.

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3)$.

5. Trouver le terme général des suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + a_n X + b_n \text{ avec } Q_n \in \mathbb{R}[X].$$
Indication : après division euclidienne, on pourra trouver les racines réelles du polynôme $X^2 - 3X + 2$ et évaluer l'égalité en ces valeurs.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $X^n = (X^2-3X+2)Q(X)+a_nX+b_n$ avec Q un polynôme et $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, par division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X^2 - 3X + 2)$.
Comme 1 et 2 sont racines de $X^2 - 3X + 2$, on obtient en évaluant en ces valeurs les égalités $1^n = 0 + a_n + b_n$ et $2^n = 0 + 2a_n + b_n$, donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = -2^n + 2$.

6. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Alors en évaluant l'expression de la question précédente en A, on obtient pour tout entier naturel n non nul,
$A^n = (A^2 - 3A + 2I_3)Q(A) + a_nA + b_nI_n = a_nA + b_nI_n$
$= \begin{pmatrix} -2^n+2 & 3(2^n-1) & 2(2^n-1) \\ -2(2^n-1) & -2^n+2+5(2^n-1) & 2(2^n-1) \\ 2(2^n-1) & -3(2^n-1) & -2^n+2 \end{pmatrix}$

On cherche à retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

7. Résoudre $(\mathcal{S}_1)$ le système linéaire $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Solution : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2z = x \\ -2x + 5y + 2z = y \\ 2x - 3y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$
La matrice associée au système (il n'est pas nécessaire d'écrire une matrice augmentée car le système est homogène) est
$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et$L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_1$
$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_2$
$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
x et y sont des inconnues principales, z est une inconnue secondaire et passe donc au second membre en temps que paramètre.
Le système est alors équivalent à
$\begin{cases} -x + 3y = -2z \\ -y = z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 3y \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$
L'ensemble des solutions à (S_1) est $\{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

8. Résoudre $(\mathcal{S}_2)$ le système linéaire $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

Solution : Le système est équivalent à $\begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \end{cases}$

C'est à dire que les trois lignes sont équivalentes, et que le système est équivalent à l'équation $2x-3y-2z=0$ (x inconnue principale, y et z inconnues secondaires), et l'ensemble des solutions est $\left\{ (\frac{3}{2}y+z, y, z), y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, montrer que le système d'inconnue $AX = \lambda X$ n'admet que la solution nulle.

On pourra montrer que la matrice $A - \lambda I_3$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est inversible

Solution :

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, la matrice associée au système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0 (\Leftrightarrow AX = \lambda X)$ est

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\lambda \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ -\lambda & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \dfrac{\lambda}{2} L_1$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 3\dfrac{2-\lambda}{2} & \dfrac{(2-\lambda)(2+\lambda)}{2} \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 2L_3$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 3(2-\lambda) & (2-\lambda)(2+\lambda) \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda \neq 1, 2$, cette matrice est échelonnée et admet 3 pivots non nuls. Elle est donc inversible, et la seule solution est la solution nulle.

On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont C_1, C_2 et C_3.

10. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

Solution : Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On applique le pivot de Gauss à P et à I_3 en même temps, ce qui montre que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

11. Montrer que les colonnes C_1, C_2 et C_3 sont solutions d'un des systèmes $(\mathcal{S}_1)$ ou $(\mathcal{S}_2)$.

Solution : On calcule $AC_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1$

Donc C_1 est solution du système $(\mathcal{S}_1)$. On calcule de même $AC_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2C_2$ donc C_2 est solution du système $(\mathcal{S}_2)$ et on trouve que C_3 l'est aussi.

12. En déduire qu'il existe une matrice diagonale telle que $AP = PD$.

Solution : On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

À la question précédente, on a montré que la matrice AP est la matrice ayant pour colonnes $C_1, 2C_2$ et $2C_3$.

Or la matrice produit PD a aussi pour colonnes $C_1, 2C_2$ et $2C_3$. Donc $AP = PD$.

13. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une méthode pour retrouver la valeur de A^n.

Solution : D étant diagonale, on montre par une récurrence immédiate que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et comme $AP = PD \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$,

Alors $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D \cdots (P^{-1}P)DP^{-1}$ car le produit matriciel est associatif, soit $A^n = PD^nP^{-1}$.

Ainsi calculer les puissances de A revient à faire le produit de ces 3 matrices.

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par récurrences par $u_0 = v_0 = 1 = -w_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 5v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - 3v_n \end{cases}$

14. Donner le terme général de la suite (u_n).

Solution : On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors le système se réécrit matriciellement $X_{n+1} = AX_n$, et on montre pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $X_n = A^n X_0$ par récurrence.
Ainsi, le terme général de la suite (u_n) est $u_n = u_0(-2^n + 2) + v_0 3(2^n - 1) + w_0 2(2^n - 1) = 1$.
C'est donc la suite constante égale à 1.

15. Pour quelles valeurs de (u_0, v_0, w_0) des suites définies par les relations de récurrence de la question précédente seraient constantes ?

Solution : Les suites sont constantes si $X_{n+1} = X_n$ c'est à dire si $X_n = AX_n$, et donc si $X_n (= X_0$ car constante) est solution de $(\mathcal{S}_1)$. Les suites sont constantes si et seulement si $u_0 = v_0 = -w_0$.

3 Probabilités

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée une fois sur deux, et les autres faces ont la même chance d'être tirées. Les autres dés ne sont pas truqués. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

Solution :
On note l'événement T :"On lance un dé truqué", et on note **n** l'événement :"On obtient le chiffre n" pour $n \in \{1, \dots, 6\}$.
On a alors $P(T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et $P(\overline{T}) = \frac{4}{5}$.
Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(T, \overline{T})$

$$P(\mathbf{6}) = P(\overline{T})P_{\overline{T}}(\mathbf{6}) + P(T)P_T(\mathbf{6}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30}.$$

2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Solution :
Par la formule de Bayes

$$P_{\mathbf{6}}(T) = \frac{P(T) \times P_T(\mathbf{6})}{P(\mathbf{6})} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7}.$$

3. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du lancer de dé. Donner l'espérance et la variance de X

Solution :
On a déjà calculé $P(X = 6) = P(\mathbf{6}) = \frac{7}{30}$.
Pour $n \in \{1, \dots, 5\}$,

$P_T(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ car on a une probabilité uniforme d'obtenir les autres chiffres et $P(\bigsqcup_{i=1}^{6} i) = 1$ et par la formule des probabilités totales sur le SCE $(T, \overline{T})$,

$$P(X = n) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(\mathbf{n}) + P(T) \times P_T(\mathbf{n}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{723}{150}.$$

Alors $E(X) = \frac{23}{150}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + \frac{7}{30} \times 6 = \frac{37}{10}$
puis par la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Par la formule de transfert
$E(X^2) = \frac{23}{150}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + \frac{7}{30} \times 6^2 = \frac{241}{15}$,
finalement,
$V(X) = \frac{241}{15} - (\frac{37}{10})^2$.

4 Algèbre bilinéaire

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2 \quad \psi(P, Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution :
ψ est clairement bilinéaire et symétrique.
$\psi(P, P) = \sum_{i=0}^{3} P(i)^2 \geq 0$ donc ψ est positive et si $\psi(P, P) = 0$, c'est que P admet au moins les 4 racines 0, 1, 2 et 3, ce qui prouve, puisque $\deg P \leq 3$, que $P = 0$. Ainsi ψ est bien définie positive, et donc un produit scalaire.

2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$. Donner une base orthonormale de F.

Solution :
Par procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt,
On trouve successivement
$P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{2}$,
$\widetilde{P_1} = X - \psi(1\frac{1}{2}, X)\frac{1}{2}$ puis $P_1 = \frac{\widetilde{P_1}}{\|\widetilde{P_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$ et enfin
$\widetilde{P_2} = X^2 - \psi(P_0, X^2)P_0 - \psi(P_1, X^2)P_1$ puis $P_2 = \frac{\widetilde{P_2}}{\|\widetilde{P_2}\|} = \frac{X^2 - 3X + 1}{2}$.
Et (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormale de F.

3. Donner une expression du projeté orthonormale sur F.

Solution :
Le projeté orthogonal de $R \in \mathbb{R}_3[X]$ sur F est alors
$p_F(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$

4. Calculer la distance de $R = 5X^3 - 24X^2 + 31X + 6$ à F.

Solution :
Par théorème de minimisation,

$$\begin{aligned} d(R, F) &= \|R - p_F(R)\| \\ &= \|p_{F^\perp}(R)\| \end{aligned}$$

où $p_{\overline{F}}(R)$ est le projeté orthogonal sur $F^\perp$, qui est plus simple à calculer car $\dim(F^\perp) = 1$.
On cherche un vecteur non nul de $F^\perp$,(qui sera sa base)
soit en calculant $X^3 - \psi(P_0, X^3)P_0 - \psi(P_1, X^3)P_1 - \psi(P_2, X^3)P_2$,
soit en résolvant le système

$$aX^3 + bX^2 + cX + d \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \psi(aX^3 + bX^2 + cX + d, 1) = 0 \\ \psi(aX^3 + bX^2 + cX + d, X) = 0 \\ \psi(aX^3 + bX^2 + cX + d, X^2) = 0 \end{cases}$$

On trouve finalement $d(R, F) = \dfrac{5}{4}$