Exercice : ATS 2020

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On définit, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, ma matrice A_a par

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose également $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable.
2. Soit a un réel. Calculer A_aU_1. En déduire que 2 est valeur propre de A_a.
3. Soit a un réel. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a.
4. Donner, en discutant suivant les valeurs du réel a, les valeurs propres réelles de A_a et leur ordre de multiplicité. On recopiera et complétera le tableau synthétique suivant.

Cas	**Valeurs propres réelles de A_a et ordre de multiplicité**
$a < 0$	
$a = 0$	
$a > 0$ et $a \neq 4$	
$a = 4$	

5. (a) Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.
   (b) Déterminer une base du noyau de A_0. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?
6. Étude de la matrice A_4.
   (a) Déterminer une matrice colonne $U_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_1, U_2) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre 2.
   (b) Déterminer une matrice colonne $U_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_3) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre -2.
   (c) Calculer la matrice inverse de $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
   (d) Trouver une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_4 = PDP^{-1}$.

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4v_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
8. (a) Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = BX_n$.
   (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $B = A_a + bI_3$.
   (c) En déduire que X_0 est un vecteur propre de la matrice B associé à une valeur propre que l'on précisera.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n.