

Exercice : calcul approché d'une intégrale

Dans cet exercice on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

dont on cherche à donner une approximation.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

- Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- En déduire le développement limité de \arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.
- En déduire que l'intégrale I est bien définie.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on définit

$$r_n = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

2. Établir pour tout réel $x \in [0, 1]$ la majoration

$$|r(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel t de $[0, 1]$, on a

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}.$$

En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$x s'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1)$.

- Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de I à 10^{-4} près.
- Écrire une fonction nommée `s`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie le nombre $s_n(1)$.
- Écrire une fonction nommée `trouve_N`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif ε et renvoie le plus petit entier N tel que $\frac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$.
- En utilisant les fonctions `s` et `trouve_N`, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale I à 10^{-10} près.