Exercice : Courbe paramétrée

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère les fonctions x et y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = 3\cos t - 2\left(\cos t\right)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2\left(\sin t\right)^3$$

On considère la courbe Γ paramétrée par $t \longmapsto (x(t), y(t))$ et on note, pour tout réel t, $P(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t, les points $P(t+\pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire que l'étude de la courbe Γ peut se réduire à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
(indication : On montrera que $x'(t) = 3\sin(t)\cos(2t)$)
4. Donner une représentation graphique de la courbe Γ en y faisant apparaître pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.