Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f\left(x\right)=\sqrt{3x+4}$. Soit $u_0\in[0,+\infty[$ et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

1) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

2) Résoudre l'équation $f(x)=x$.

3) À l'aide d'une inégalité des accroissements finis, montrer que pour tous réels $x,y\in[0,+\infty[$, $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{3}{4}|x-y|$.

4) En déduire que pour tout entier naturel n, $|f(u_n)-f(4)|\leqslant\dfrac{3}{4}|u_n-4|$.

5) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $|u_n-4|\leqslant\left(\dfrac{3}{4}\right)^n|u_0-4|$.

6) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Considérons les matrices $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-4&5\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer $D=P^{-1}AP$.

2) En déduire A^n pour tout entier naturel $n\geqslant1$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^3+x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

1) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième, $f^{(n)}$ de f.