Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère le nombre $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Un triangle ABC est dit *équilatéral direct* si $AB = AC$ et que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

1) Soient a, b, c les affixes respectives de trois points A, B, C deux à deux distincts. Montrer que le triangle ABC est direct si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a} = \omega$.

2) Dans cette question $a = 0$, $b = 1 + \mathrm{i}$, $c = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct.

Exercice 2

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2) Montrer que la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale et calculer ses coefficients.

3) Calculer D^n.

4) Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D (le calcul des coefficients A^n n'est pas demandé).