

**Exercice**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $u_1$ .
- 2) Établir le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x + 1)}$ .
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = x$ .
- 4) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Indication : on pourra remarquer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 5) En déduire que  $(u_n)$  converge et donner sa limite.