

Le but cet l'exercice est de résoudre l'équation

$$(E) : x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Pour cela, on introduit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^x$.

- 1) Montrer que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont deux solutions de l'équation (E).
- 2) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 3) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = (1 + \ln x) e^{x \ln x}$$

- 4) Résoudre l'inéquation $1 + \ln x > 0$. En déduire le signe de f' .
- 5) Établir le tableau de variation de f .
- 6) En déduire le nombre de solutions de (E) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.