DM à rendre pour le 07/03/2022

Exercice 1

Résoudre

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 8\sin t \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$(y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$.

Exercice 2 (d'après ATS 2021)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy''(x) + y'(x) = 0 \quad (H),$$

d'inconnue une fonction y définie et deux fois dérivable sur une intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si y est solution sur $]0; +\infty[$ de (H_0), alors $z = y'$ est solution de l'équation différentielle

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0 \quad (E)$$

sur $]0; +\infty[$.

2) **a)** Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) En déduire les solutions de (H) sur $]0; +\infty[$.

3) Résoudre l'équation différentielle (H) sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

4) Quelles sont les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (ATS 2014)

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin\alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos\alpha \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $M(\alpha)$ le point de paramètre α de $\mathcal{C}$.

1) **a)** Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

b) Donner les coordonnées du milieu du segment $[M(\alpha), M(2\pi - \alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

c) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{M(\alpha)M(\alpha + 2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathcal{C}$ invariante.

d) Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathcal{C}$.

2) **a)** Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0; 2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)

b) Déterminer la limite $\lim\limits_{\alpha \to 0+} \dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale en $M(0)$.

c) Donner une représentation graphique de $\mathcal{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi; 2\pi]$ dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

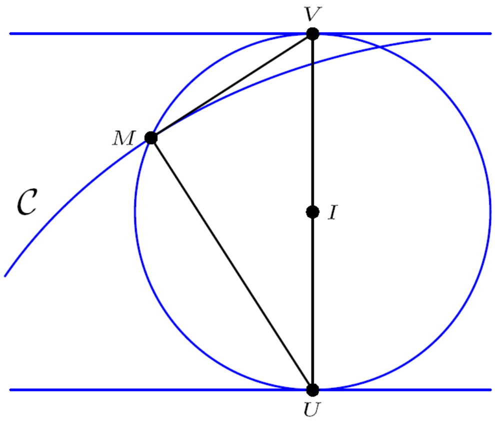
On suppose maintenant que $\alpha \in]0; \pi[$. On note M le point $M(\alpha)$ de $\mathcal{C}$.

3) **a)** Donner les composantes d'un vecteur directeur $\overrightarrow{t}$ de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en M, et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ de la normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{C}$ en M.

b) Donner une équation de la droite $\mathcal{N}$ normale à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point U, intersection de $\mathcal{N}$ avec l'axe Ox.

c) Donner une équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à $\mathcal{C}$ en M. Déterminer les coordonnées du point V, intersection de $\mathcal{T}$ avec la droite d'équation $y = 2$.

On appelle I le milieu du segment $[UV]$.



4) **a)** Montrer que le cercle de centre I et de rayon 1 contient U, V et M.

b) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IM}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IU};\overrightarrow{IM}\right)$.

c) Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{UM}$ (situé sous la droite (UM)) et la longueur OU (O est l'origine du repère).

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$. On définit l'application $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = 2z - z^2.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{OM_1M_2N}$ est un parallélogramme.
2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.
3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point d'affixe $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $\mathrm{N}(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

2. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.
   (b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $\mathrm{N}(-t)$ se déduit du point $\mathrm{N}(t)$ par une symétrie que l'on précisera.
   (c) Déduire des questions 2(a) et 2(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0\,,\alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.
3. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0\,,\pi]$, puis étudier leur signe. *On rappelle les formules trigonométriques suivantes :*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

   (b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0\,,\pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.
4. Montrer que pour tout réel $t \in \,]0\,,\pi]$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $\mathrm{N}(t)$.
5. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $\mathrm{N}(t)$ pour $t \in \{\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.
6. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$