D'après ATS 2021 Exercice 1, partie A

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de tailles 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b, on définit la matrice

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble des matrices suivant :

$$F = \left\{ P(a,b) |\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On pose enfin

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercices peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Étude de l'ensemble F et la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.
2. Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$.
3. Montrer que N est inversible et que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F. *Indication : on pourra utiliser la question précédente.*
4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

On notera dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $A = QBQ^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.
7. En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n.

Partie B - Inversibilité des matrices de F

1. Soit b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1,b)P(x,y) = P(x + 2by, bx + y + by) = P(x,y)P(1,b).$$

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M-1 \in F$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel b, la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si, et seulement si, le système

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y).

3. Montrer que la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si, et seulement si, $b \in \mathbb{R}\backslash \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$.
4. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1,b)$ est inversible ?
5. Soit a un réels non nul. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a,b) = aP\left(1, \dfrac{1}{b}\right)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a,b)$ est inversible.
6. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0,b)$ est inversible. Indication : on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.
7. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

ATS 2019 : Exercice 2

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$.
   (c) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.
2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.
3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
   (b) On pose $z = \mathrm{e}^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.
   (c) En déduire la valeur exacte de α.
   (d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
4. Montrer que, $\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^{2n}\, dt$.

1. Montrer que $I_0 = \alpha$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0, \alpha]$, *on a* $0 \leqslant \operatorname{sh} t \leqslant 1$). En déduire qu'elle est convergente.
3. (a) En remarquant que $(\operatorname{sh} t)^{2n+2} = (\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{sh} t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \operatorname{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.
   (c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\operatorname{sh}(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Scilab* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b - a \leqslant \varepsilon$.

```
function [a, b] = dicho(eps)
  a = ...
  b = ...
  while ......
    c = (a+b)/2
    if ...... then a = c
    else b = c
    end
  end
endfunction
```

Note : la fonction sh *s'écrit* `sinh` *en Scilab.*

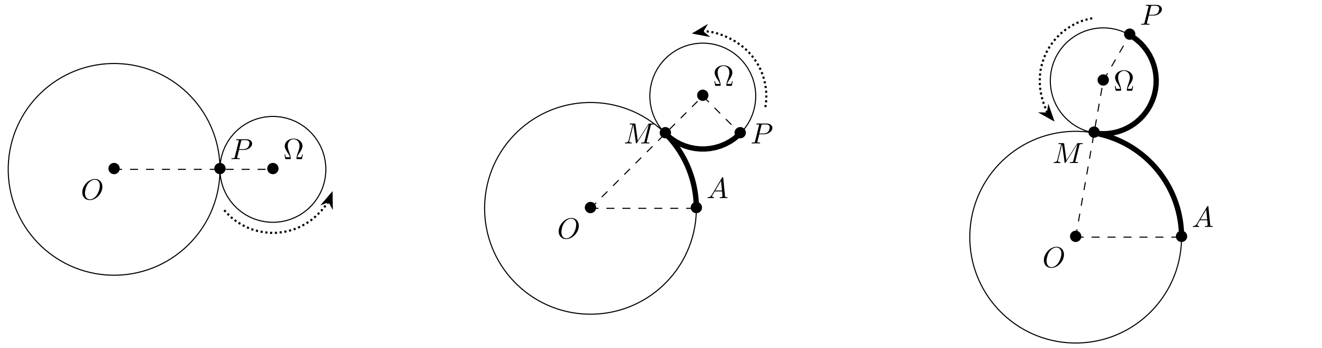
2. En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve $0,881$ comme valeur approchée de α. On rappelle de plus que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$I_0 = \alpha, \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

   Écrire une fonction, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie une valeur approchée de I_n.

ATS 2019 : Exercice 4, Partie A

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarque que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MP}$.

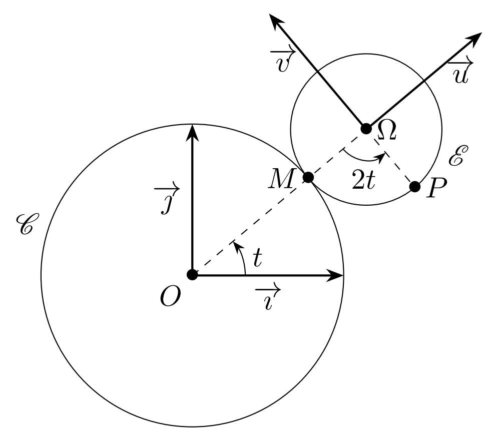


Étude de la trajectoire du point P

1. Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM},\right)$ satisfont l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = 2\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM},\right)$.

   Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{E}$ le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle $\mathscr{C}$ en M. Le centre du cercle $\mathscr{E}$ est noté Ω. D'après la question 1, le point P est le point du cercle $\mathscr{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathscr{P} = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \cos(t)\overrightarrow{\imath} + \sin(t)\overrightarrow{\jmath} \\ \overrightarrow{v} = -\sin(t)\overrightarrow{\imath} + \cos(t)\overrightarrow{\jmath} \end{cases}.$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère $\mathscr{R}$.
3. Démontrer que le repère $\mathscr{P}$ est orthonormal.
4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{P}$. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont

$$\left(3\cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3\right).$$