Chapitre 6 : Intégrales généralisées

Dans tout le cours on se donne I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On note $I =][a, b][$ dans ce cours lorsqu'on ne sait pas si l'intervalle est ouvert ou fermé.

I Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est définie en première année.
Si f est continue sur I un intervalle quelconque, nous allons définir lorsque cela a du sens l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$.

1 Definition

Définition 1 (*convergence d'une intégrale généralisée*)

— Si $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **impropre** en b, et qu'elle est **convergente** si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite finie dans $\mathbb{K}$ lorsque $x \to b^-$.

— Si $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **impropre** en a et qu'elle est **convergente** si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite finie dans $\mathbb{K}$ lorsque $x \to a^+$.

— Si $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **impropre** en a et b, et qu'elle **convergente** s'il existe $c \in]a, b[$, tel que les intégrales généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes, et dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

— Dans tous les cas, on dit que l'intégrale est **divergente** si elle n'est pas convegente.

— On appel **nature** de l'intégrale généralisée son caractère divergent ou convergent.

Remarque 2

Attention, on utilise la même notation pour parler de l'objet intégrale impropre (quelque soit sa nature) et la valeur de la limite si elle converge.
(Contrairement à l'objet série numérique $\sum u_n$ par exemple, et la valeur de sa limite notée par la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ seulement si elle converge)
Si l'intégrale de f sur I converge, on note la limite $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$.
Si $a > b$ et que $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors on peut noter $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ et les notations

et propriétés restent cohérentes.

Exemple 3

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
Elle est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1$
(intégrale de Riemann de référence)
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ est impropre en 1, convergente et égale à 2
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{3/2}}\mathrm{d}t$ est impropre en 1 et divergente

Propriété 4

Si $f : [a,b[\to \mathbb{K}$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$ (ie f est prolongeable par continuité en b)
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et on dit que l'intégrale et **faussement impropre** en b.

Exemple 5

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente, elle est faussement impropre en 0.

Remarque 6

Attention, pas de faux problème de $+\infty$
$\dfrac{1}{t}$ admet un limite finie en $+\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge

2 Propriétés de l'intégrale

Propriété 7 (*Fonctions à valeurs complexes*)

Si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales

$$\int_a^b \mathcal{R}e(f(t))\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b \mathcal{I}m(f(t))\mathrm{d}t$$

convergent et dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{R}e(f(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathcal{I}m(f(t))\mathrm{d}t$$

Propriété 8 (*Linéarité de l'intégrale*)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
Si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t$

converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

$\mathcal{P}$ropriété 9 (*Positivité et croissance de l'intégrale*)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I =][a,b][$ à valeurs réelles telles que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors

- Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$
- Si $f(t) \geq g(t)$ pour tout $t \in I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

$\mathcal{P}$ropriété 10 (*Relation de Chasles*)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, et $c \in I$ quelconque.

- Si $I = [a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Si $I =]a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Si $I =]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans tous les cas on a l'égalité

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 11

La convergence de l'intégrale de dépend pas du c choisit dans I.

$\mathcal{P}$ropriété 12 (*Réécriture du théorème de la limite monotone*)

Soit f continue par morceaux sur I et **à valeur dans** $\mathbb{R}_+$.

- Si $I = [a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.
- Si $I =]a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a,b]$.

II Fonctions intégrable

1 Convergence absolue

Définition 13

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente

Remarque 14

Si la fonction f est de signe constant sur I, son intégrale est convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

Théorème 15

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas on a l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Remarque 16

Comme pour les séries numérique, la cv absolue entraîne la cv.
Mais ici aussi la réciproque est fausse. Il est possible d'avoir que l'intégrale sur I de f converge, alors que celle de $|f|$ diverge. (comme pour les séries alternées)
Pour étudier la nature dans ce cas : encadrement, comparaison série/intégrale, ou autre méthode guidée.

Définition 17

On dit que f est **intégrable** sur I si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Propriété 18 (*Contraposée de la stricte positivité :*)

Si f est **continue et intégrable** sur I telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$ sur I.

Remarque 19

Le chapitre 2 traîtait en particulier des fonctions à valeurs positives et avec une borne impopre en $+\infty$, en parallèle aux séries numériques. Les théorèmes de comparaison pour les séries numériques ne s'apppliquent qu'aux STP, ici on a la notion de fonction intégrable pour le noter.

2 Théorèmes de comparaison

Théorème 20

Soit f et g continues par morceaux sur $I = [a, b[$.

— Si g est intégrable sur I et que $|f| \leq |g|$ sur $[a, b[$
(ou que $f(t) = \underset{t\to b^-}{o} g(t)$ ou que $f(t) = \underset{t\to b^-}{O} g(t)$),
alors f est aussi intégrable sur $[a, b[$.

— Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$, alors $f$est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.

Remarque 21

On adapte ce théorème dans les cas $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$.

3 Intégrales de référence

Rappel : en $+\infty$ il y a deux intégrales de référence

Propriété 22

(Intégrale de Riemann en $+\infty$) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\alpha > 1$

(Exponentielle en $+\infty$) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\alpha > 0$

Il y a deux intégrales de référence au voisinage de 0 :

Propriété 23

(Intégrale de Riemann en 0) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\alpha < 1$

(ln en 0) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1

Démonstration : Avec la limite, pour Riemann en exo

Soit $x \in]0,1]$, ln est continue sur $[x,1]$ et

$\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 \underset{x\to 0^+}{\to} -1$

ln est ■

Remarque 24

Attention, les intégrales de Riemann définissent deux intégrales de référence, une au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Bien sûr les intégrales de référence sont intéressantes pour comparer où elles sont impropres, $\displaystyle\int_0^{10} \ln(t)\mathrm{d}t$ est aussi convergente, mais la borne haute finie n'apporte pas d'information en comparaison.

MÉTHODE : pour étudier la nature des intégrales généralisées :

1. Dans de rares cas, on connait une primitive de la fonction à intégrer et il suffit de calculer les limites des intégrales partielles.
2. On commence par définir la fonction à intégrer. On précise ses ensemble de définition et de continuité.
3. On identifie la ou les bornes en la ou lesquelles l'intégrale est impropre.
4. Dans le cas d'une borne finie, par un calcul de limite, on détermine si la fonction se prolonge par continuité (c'est-à-dire si l'intégrale est faussement impropre).
5. Si la fonction change de signe, on considère sa valeur absolue.
6. On cherche un équivalent simple en les bornes ou l'intégrale est impropre pour comparer à une intégrale de référence.
7. Si cela n'est pas évident, on teste la règle du $t^\alpha f(t)$.

Exemple 25

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (critère des intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$, exposant $2 > 1$).

Par comparaison, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$ converge.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence) donc sur $[1, +\infty[$. Par comparaison, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t\cos(t)}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Examinons la convergence éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\, dt$. Tout d'abord, il y a un faux problème en 0 car

$$\frac{t\cos(t)}{e^t - 1} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1.$$

De plus, pour $t > 0$

$$\left|\frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\right| \leqslant \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{avec} \quad \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} t\, e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} O(e^{-t/2})$$

car $t\, e^{-t/2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par comparaison, $t \mapsto t\, e^{-t}$ puis $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - 1}$ et $t \mapsto \dfrac{t\cos(t)}{e^t - 1}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$. Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\, dt$ converge absolument, et donc converge.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - t^2}$ est continue sur $[0,1[$, à valeurs positives. On a

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{2(1 - t)}.$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$, car elle est à valeurs positives et pour tout $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) \quad \text{avec} \quad -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$, et comme elle est à valeurs positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ diverge.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $[3,+\infty[$, à valeurs positives. Pour tout $t \geqslant 3$,

$$\frac{\ln(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0,$$

et $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $[3,+\infty[$.

Par la contraposée du premier résultat de comparaison, $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[3,+\infty[$, et comme elle est à valeurs positives, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ diverge.

III Methodes de calcul

1 Utilisation de primitive

Si f est continue sur $[a,b[$, on note F une primitive de f, et pour tout $x \in [a,b[$, par le TFA $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$,

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente ssi F possède une limite finie en b^-, et dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$

De même pour toutes les autres formes d'intégrales impropres.

C'est la première méthode à essayer, et c'est celle pour la démonstration des intégrales de référence.

2 Intégration par parties

La différence entre la formule des IPP pour les intégrales de fonctions cpm sur un segment, et pour les intégrales généralisées, c'est que les trois morceaux de la formule doivent converger.

En effet, on peut avoir un intégrale qui converge et qui est la somme de deux termes divergentes : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente (prolongeable par continuité, intégrale faussement impropre en 0) ;

et pourtant ni l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ ni le "crochet généralisé" $\displaystyle\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_0^{2\pi}$ ne convergent.

Théorème 26 (*Intégration par parties pour les intégrales généralisées*)

Soit f, g deux fonctions de **classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $I =][a, b][$.
Si le crochet $[fg]_a^b$ **converge**, c'est-à-dire si la fonction fg possède une limite finie en a^+ et en b^-, alors les intégrales

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

sont de même nature.
En notant $[fg]_a^b = \lim_{t\to b^-}(f(t)g(t)) - \lim_{t\to a^+}(f(t)g(t))$, on a en cas de convergence l'égalité

$$\int_a^b f'(t)g(t) = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 27

Si $I = [a, b[$ il suffit de vérifier l'hypothède sur la limite du crochet $[fg]$ en b^-.

Exemple – On pose, sous réserve d'existence, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. La fonction ainsi définie est appelée fonction Γ d'Euler.

Commençons par étudier la convergence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Par croissances comparées, $t^{x+1}e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, donc

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (critère des intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$, exposant $2 > 1$) ; par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge. De plus,

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}},$$

donc, les deux termes étant positifs, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale de Riemann $\int_0^1 dt/t^{1-x}$ converge, ce qui équivaut à $1 - x < 1$, *i.e.* $x > 0$. L'ensemble de définition de la fonction Γ est donc $]0, +\infty[$.

Fixons $x > 0$. Les fonctions $f : t \mapsto -e^{-t}$ et $g : t \mapsto t^x$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, $t^xe^{-t} \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ car $x > 0$, et $t^xe^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ par croissances comparées. Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt$ est convergente d'après ce qui précède. D'après le théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} t^xe^{-t}\,dt = \left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

c'est-à-dire,

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

C'est ce que l'on appelle une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Γ. Elle permet en particulier de définir Γ de proche en proche sur $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. De plus, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) = 1.$$

On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
La fonction Γ généralise donc la factorielle aux valeurs non entières.

3 Changement de variable

Théorème 28 (*Changement de variable pour les intégrales généralisées*)

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux et soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ **une bijection de classe** $\mathscr{C}^1$, alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

sont de meme nature et en cas de convergence :

— Si φ strictement croissante

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

— Si φ strictement décroissante

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Remarque 29

Ne pas oublier dans la formule le signe qui prend en compte la monotonie de φ. On pourrait écrire

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$$

Le théorème s'adapte pour les autres formes d'intégrales généralisée $I = [a, b[$ par exemple.

Exemple 30

Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

en 0 : $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ cv

en $+\infty$: $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = o(\dfrac{1}{t^2})$ cv

Donc int cv $\phi : \begin{cases}]0, +\infty[\to]0, +\infty[\\ t \mapsto t^2 \end{cases}$ est une bij strictement croissante, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} 2t\mathrm{d}t$$

IV structure des espaces des fonctions intégrables

Définition 31

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si f est continue par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on dit que f est **de carré intégrable** sur I, si la fonction $|f|^2$ est intégrable sur I. On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et de carré intégrable sur I .

Propriété 32

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 33

1. L'ensemble $L^2(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$ alors leur produit est intégrable : $fg \in L^1(I, \mathbb{K})$.
3. On note $\mathcal{H} = L^2(I, \mathbb{K}) \cap \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues réelles de carré intégrable.
   Alors $\mathcal{H}$ est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire
   $$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \\ (f, g) \to \displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$
   La norme associée à ce produit scalaire, qu'on appelle norme 2 est définie par
   $$\|f\|_2 = \left(\int_I f^2 \right)^{1/2}$$