Colle ATS : Programme pour la semaine 25 (du 06/05 au 10/05)

I.19. Séries entières

- Convergence dune série entière :
  - Série entière dune variable réelle ou complexe.
  - Lemme d'Abel.
  - Rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
  - Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.
  - les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

  Les étudiants doivent savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière dont l'absolue convergence peut être étudiée avec les règles sur les séries de terme général positif. La règle de d'Alembert relative aux séries entières est hors programme.
- Somme d'une série entière d'une variable réelle
  - Fonction somme, ensemble de définition. La fonction somme est continue sur lintervalle ouvert de convergence.
  - Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, et si $\sum a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. $x = -R$), la somme est continue sur l'intervalle $[0; R]$ (resp. $[-R; 0]$).
  - La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme. Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Fonctions développables en séries entières
  - Fonction développable en série entière au voisinage de 0. Unicité du développement en série entière. Lien avec la série de Taylor.
  - Développements en série entière usuels : $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$.

  Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière et pour déterminer les solutions d'une équation différentielle linéaire développables en série entière.
- Exponentielle complexe : $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

II.10. Espaces Euclidiens

- Produit scalaire. Notations $\langle x \mid y\rangle$, ou $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$. Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$. Norme associée à un produit scalaire, distance associée. Bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.

- Isométries vectorielles et matrices orthogonales :

  - Un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.
  - Une matrice A est orthogonale si ${}^tAA = \mathrm{I}_n$, caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes. Groupe orthogonal d'ordre n.
  - Notations $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{O}(n)$.
  - Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, alors u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ est orthogonale.
  - Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.

➢ Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3 : Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries. Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques dune isométrie.

➢ Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Ω telles que $D = {}^t\Omega A\Omega$.