Programme de colles, semaine du 13-12

I) Questions de cours

- Calcul (et valeur) de l'espérance d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $\mathcal{G}(p)$
- Calcul de la série génératrice d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $\mathcal{G}(p)$
- Calcul de la variance d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$
- Énoncer un des cinq théorèmes de convergence dominée (cf ci-dessous)

II) Probabilités

1) Espérance

- définition : X admet une espérance si $\sum x_n P(X = x_n)$ CVA
- propriétés (linéarité), espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes
- espérances usuelles
- Théorème de transfert

2) Variance

- Moment d'ordre 2
- Si X admet un moment d'ordre 2, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
- <u>Si X et Y sont indépendantes</u>, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- écart-type, covariance…

3) Inégalités d'estimation

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une variance, et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\frac{S_n}{n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4) Série génératrice

- Série génératrice d'une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.
- la convergence est normale sur $[-1, 1]$
- G_X est continue sur $[-1, 1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- G_X caractérise la loi de X
- <u>Si X et Y sont indépendantes</u>, $G_{X+Y} = G_X G_Y$
- Lien avec les moments :
  - ▷ X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1, et alors $E(X) = G'_X(1)$
  - ▷ X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, et alors $G''_X(1) = E(X^2) - E(X)$

III) Suites, séries de fonctions et Intégrales à paramètres : convergence dominée

1) Suite de fonctions

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle J.*
On suppose
- *(f_n) CVS vers f sur J*
- *f_n et f sont $\mathcal{C}^0$ p.m. sur J.*
- *il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ p.m. et intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors (les fonctions f_n et f sont intégrables et)

$$\int_J f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J f(t)dt$$

2) Intégrales à paramètres

a) Continuité

Théorème. *On considère* $g : I \times J \to \mathbb{K}$ *et on considère*

$$f(x) = \int_J g(x,t)dt.$$

On suppose
- $\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- $\forall t \in J, x \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$
- $\forall x \in I, \forall t \in J, |g(x,t)| \leq \varphi(t)$, *où* φ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrable*

Alors f *est (bien définie sur* J *et) continue sur* J.

b) Limite

Théorème. *On considère* $g : I \times J \to \mathbb{K}$, $f(x) = \int_J g(x,t)dt$, *et* a *une extrémité de* I.
On suppose
- $\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- $\forall t \in J, g(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} h(t)$, *où* h *est une fonction* $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- $\forall x \in I, \forall t \in J, |g(x,t)| \leq \varphi(t)$, *où* φ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrable*

Alors (h *est intégrable et)*

$$\int_J g(x,t)dt \xrightarrow[x \to a]{} \int_J h(t)dt.$$

c) Dérivabilité

Théorème. *On considère* $g : I \times J \to \mathbb{K}$, $f(x) = \int_J g(x,t)dt$, *et* a *une extrémité de* I.
On suppose
- $\forall x \in I, t \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m et intégrable*
- $\forall t \in J, x \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^1$, *de dérivée* $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$
  et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- $\forall x \in I, \forall t \in J, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$, *où* φ *est* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrable.*

Alors f *est (bien définie et)* $\mathcal{C}^1$ *sur* J, *de dérivée*

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt.$$

3) Séries de fonctions

Théorème. *On considère* $\sum f_n$ *une série de fonctions sur* J.
On suppose
- $\sum f_n$ *CVS vers une fonction* f $\mathcal{C}^0$ *p.m.*
- f_n *sont* $\mathcal{C}^0$ *p.m. et intégrables*
- $\sum \int_J |f_n|$ *converge.*

Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur* J *et*

$$\int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(t)dt.$$