

Programme de colles, semaine du 06-12

I) Questions de cours

- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales (version système complet d'évènements dénombrable)
- Deux des cinq versions équivalentes de la σ -additivité/continuité croissante/continuité décroissante.
- Calcul (et valeur) de l'espérance d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $\mathcal{G}(p)$
- Calcul de la série génératrice d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $\mathcal{G}(p)$
- Calcul de la variance d'une loi $\mathcal{P}(\lambda)$

II) Probabilités

1) Révisions de sup

- Nombres de parties, nombre de parties de cardinal k .
- probabilités, probabilités conditionnelles (+ Formule de Bayes)
 - ▷ Formule des probabilités composées
 - ▷ Formule des probabilités totales
- formalisme des variables aléatoires
- Schéma binomial de Bernoulli

2) Probabilités discrètes

- Intersections/unions dénombrables : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
- Lancer d'une pièce une infinité de fois.
- Utilisation de la σ -additivité, continuité croissante/décroissante de P .
- système complet dénombrable d'évènements

3) Variables aléatoires

- Lois de Bernoulli, Binomiale, de Poisson, géométrique
- Indépendance
- Couples de variables aléatoires
- Sommes de variables aléatoires indépendantes

4) Espérance

- définition : X admet une espérance si $\sum x_n P(X = x_n)$ CVA
- propriétés (linéarité), espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes
- espérances usuelles
- Théorème de transfert

5) Variance

- Moment d'ordre 2
- Si X admet un moment d'ordre 2, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
- Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- écart-type, covariance...

6) Inégalités d'estimation

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une variance, et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

7) Série génératrice

- Série génératrice d'une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N} .
- la convergence est normale sur $[-1, 1]$
- G_X est continue sur $[-1, 1]$, C^∞ sur $] - 1, 1[$.
- G_X caractérise la loi de X
- Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$
- Lien avec les moments :
 - ▷ X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1, et alors $E(X) = G'_X(1)$
 - ▷ X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, et alors $G''_X(1) = E(X^2) - E(X)$