

Programme de colles, semaine du 29-11

I) Questions de cours

- Donner le DSE (+ rayon) de $\ln(1 \pm x)$, $(1+x)^\alpha$, \cos , \sin , \cosh , \sinh , \arctan ,
- Énoncer le théorème de produit de Cauchy pour des séries entières
- Donner l'expression de la dérivée p -ième de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Sur quel intervalle est-elle valable ?
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales (version système complet d'évènements dénombrable)
- Deux des cinq versions équivalentes de la σ -additivité/continuité croissante/continuité décroissante.

II) Séries entières

Séries entières complexes $\sum a_n z^n$ et réelles $\sum a_n x^n$.

1) Convergence d'une série entière

- Rayon de convergence
 - ▷ $R = \sup\{|z| \mid (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$
 - ▷ Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
 - ▷ Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
 - ▷ ★ Si $(a_n z^n)$ est bornée, $R \geq |z|$
 - ▷ ★ Si $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0, $R \leq |z|$
- Détermination du rayon
 - ▷ Règle de d'Alembert : si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell$, $R = \frac{1}{\ell}$
 - ▷ ★ Cas de séries lacunaires
 - ▷ Résultats de comparaisons
- Opérations
 - ▷ Sommes de séries entières
Le rayon est $\geq \min(R_a, R_b)$.
 - ▷ Produit de Cauchy de deux séries entières
Le rayon est $\geq \min(R_a, R_b)$.

2) Régularité

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

- La convergence de la série de fonctions $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est normale sur tout segment $[-a, a] \subset]-R, R[$.
- f est continue sur $] -R, R[$.
- Série entière dérivée
 - ▷ Le rayon de $\sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} (n+1) x^n$ est R (le même que $\sum a_n x^n$)
 - ▷ f est dérivable sur $] -R, R[$, de dérivée

$$\forall x \in] -R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}.$$

- Série entière primitive
 - ▷ Le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est R
 - ▷ La fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de f sur $] -R, R[$ qui s'annule en 0.
- f est de classe C^i sur $] -R, R[$.
 - ▷ $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

3) Développements en série entière

- f est DSE en 0 si elle coïncide au voisinage de 0 avec la somme d'une série entière
- DSE des fonctions usuels (+ rayons)
- Série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$ d'une fonction \mathcal{C}^∞
 - ▷ Si f est DSE, alors elle est égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.
- Unicité du DSE
 - ▷ si f est paire, et DSE, son DSE ne contient que des termes de degré pair.

III) Probabilités

1) Révisions de sup

- Nombres de parties, nombre de parties de cardinal k .
- probabilités, probabilités conditionnelles (sauf Bayes)
 - ▷ Formule des probabilités composées
 - ▷ Formule des probabilités totales
- formalisme des variables aléatoires (sauf espérance).
- Schéma binomial de Bernoulli

2) Probabilités discrètes

- Intersections/unions dénombrables : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
- Lancer d'une pièce une infinité de fois.
- Utilisation de la σ -additivité, continuité croissante/décroissante de P .
- système complet dénombrable d'évènements