Programme de colles, semaine du 15-11

I) Questions de cours

- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ est convergente
- Montrer que $\int_0^1 \ln t\,dt$ est convergente
- Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\ln t}\,dt$ est convergente
- Une des trois questions de l'exercice suivant.

  Exercice 1 On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.
  1. Montrer que S converge uniformément sur $[0,1]$.
  2. Montrer que S converge simplement sur $]-1,1[$.
  3. Montrer que S converge normalement sur tout segment de la forme $[-a,a]$, pour $a \in]0,1[$.

II) Réduction

Cf programme précédent.

III) Intégration

1) Rappels de sup

- Primitives
- IPP
- Changement de variable

2) Intégrales généralisées

- Intégrales impropre en un point
- Intégrales convergentes, calcul d'une intégrale convergente.
- Si $\int_0^2 f(t)dt$ est impropre en 0 et en 2, $\int_0^2 f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^2 f(t)dt$ convergent.

3) Fonction intégrables

- On dit que f est intégrable sur I si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente.
- f intégrable en a et $b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ convergente
- Théorèmes de comparaison sur les fonctions intégrables.
- Intégrales de références en $+\infty$ et en 0 : $\frac{1}{t^\alpha}, \ln t$

4) Méthode de calcul

a) Crochet généralisé

- définition
- $[F]_a^b$ cv si et seulement si F admet des limites finies en a et b.
- Si F est une primitive de f sur $]a,b[$, $\int_a^b f(t)dt$ et $[F]_a^b$ ont la même nature
- Sous réserve de convergence en a, $g : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f vérifiant $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$.

b) IPP

- Si f $\mathcal{C}^1$ et g $\mathcal{C}^0$,
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)dt$$
- À justifier par la convergence de deux des trois termes.
  En pratique, on justifie que la première intégrale est convergente, et que le crochet converge, en calculant sa valeur (calcul de limite).

c) Changement de variable

- On pose $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)dt$
- À justifier car φ $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]a, b[$ sur $\ldots$.
- Les deux intégrales ont la même nature

5) Espaces de fonctions intégrables.

- $L^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
- $L^2(I, \mathbb{K}) = \{f \mid |f|^2 \text{ intégrable}\}$
  - ▷ Si $f, g \in L^2$, $fg \in L^1$
  - ▷ Inégalité de Cauchy-Schwarz
  - ▷ L^2 est un espace vectoriel