Programme de colles, semaine du 15-03

I) Questions de cours

- Donner la définition du gradient, et de la différentielle d'une fonction $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
- Énoncer le théorème de développement limité, pour $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Donner l'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle ou d'une équation de récurrence linéaire d'ordre 2
- Énoncer le théorème de Cauchy-lipschitz pour une équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$

II) Calcul différentiel : fonctions $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1) Continuité

a) Rappels pour des fonctions $E \to F$

- Opérations

b) Fonctions $E \to \mathbb{R}$

- Opérations
- Fonctions coordonnées, fonctions polynomiales
- Continuité de la norme $E \to \mathbb{R}$
- Étude de la continuité de fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - ▷ continuité en $(0,0)$, ou prolongement par continuité

2) Dérivées partielles, fonctions $\mathcal{C}^1$

a) Dérivées partielles

- Fonctions partielles, dérivées partielles
- fonctions $\mathcal{C}^1$: existence des dérivées partielles + continuité de celles-ci

b) DL d'une fonction $\mathcal{C}^1$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o_{h\to\vec{0}}(\|h\|)$$

- gradient, différentielle d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$
  - ▷ $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o_{h\to\vec{0}}(\|h\|)$
  - ▷ $f(a+h) = f(a) + \langle h, \operatorname{grad} f(a)\rangle + o_{h\to\vec{0}}(\|h\|)$
- f $\mathcal{C}^1$ est constante sur U ouvert convexe si et seulement si ses dérivées partielles sont nulles si et seulement si $\operatorname{grad} f = \tilde{0}$

c) Lignes de niveau

- Ligne de niveau pour $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Champ de gradient
- Les lignes de niveau sont orthogonales au champ de gradient :
  - ▷ si $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré dont la trajectoire est incluse dans une ligne de niveau, $\forall t,\ g'(t) \perp \operatorname{grad} f(g(t))$

3) Extrema

- Si f est continue sur une partie D fermée bornée, alors f y est bornée, et atteint ses bornes.
- Point critique, extrema, extrema locaux
- Sur un ouvert, si f admet un extremum local en a, et f admet des dérivées partielles en a, alors a est un point critique
- Si f $\mathcal{C}^1$ sur un fermé borné, ses extrema sont atteints soit en un point critique, soit sur la frontière (le bord).

4) Dérivées partielles d'ordre deux

- fonction $\mathcal{C}^2$
- Théorème de Schwarz : si f $\mathcal{C}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

5) Notion d'équations aux dérivées partielles

- Solutions de classe $\mathcal{C}^1/\mathcal{C}^2$ des EDPs
  - ▷ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$
  - ▷ $\frac{\partial f}{\partial x} = h(y)$
  - ▷ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
  - ▷ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

III) Équations et systèmes différentiels

1) Équations différentielles scalaires d'ordre 1

- Rappels sur les équations résolues
  - ▷ Structure de l'ensemble des solutions
  - ▷ Unique solution à un problème de Cauchy
  - ▷ Méthode de variation de la constante
  - ▷ Recherche d'une solution particulière sous la forme $Ke^{@}$ ou $Kte^{@}$
- Raccordement de solutions

2) Systèmes différentiels

- Résolution de systèmes différentiels diagonaux, triangulaires
- Équations vectorielles $X' = A(t)X + B$
- Structure de l'ensemble des solutions
  - ▷ somme d'une solution particulière et des solutions homogènes
  - ▷ Pour l'équation homogène, c'est un sous-espace vectoriel
- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy
- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est de dimension n.
- Résolution de système par diagonalisation/trigonalisation
  - ▷ Si $A = PDP^{-1}$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$, où $Y = P^{-1}X$

3) Équations différentielles scalaires d'ordre supérieur (2)

- $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \Leftrightarrow Y' = AY + B$, où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$
  - ▷ Extension à une équation d'ordre n
- Extension des résultats sur les systèmes différentiels
  - ▷ Problème de Cauchy
  - ▷ Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy
  - ▷ Pour une équation homogène résolue, l'ensemble des solutions est de dimension 2
  - ▷ Structure de l'ensemble des solutions dans le cas général
- Résolution d'équations scalaires d'ordre 2 à coefficients constants
- Détermination de solutions particulières
  - ▷ polynomiales
  - ▷ développables en série entière

4) Suites récurrentes d'ordre 2

- Solutions d'une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants
- $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$
  - ▷ $X_n = A^n X_0$, on est ramené au calcul de A^n, par réduction de la matrice A.