TD n°4 - Convergence uniforme des suites et séries de fonctions

---

Exercice 1. $(*)$ Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes sur l'intervalle I précisé :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x) \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ sur $I = [0,1]$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ sur $I = [0, +\infty[$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto nx^2 e^{-nx}$ sur $I = \mathbb{R}_+$ puis sur $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $I = \mathbb{R}$ puis sur $I =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$

Exercice 2. On pose $u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $(*)$ Étudier la convergence simple de la suite de fonction (u_n) sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonction (u_n) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonction (u_n) sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. On pose $u_n(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $u_n(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonction (u_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonction (u_n) sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n} \end{cases}$

1. Étudier la limite simple de (f_n) et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) \geq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
2. Montrer l'encadrement $t - \dfrac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, puis justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.
3. Établir finalement que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. $(*)$ Soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \dfrac{1}{n} \end{cases}$.

Montrer que (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2)

Exercice 6. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers f et g des fonctions bornées.

Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 7. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f.

On considère une suite $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Montrer que $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Exercice 8. Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers la fonction nulle.

Montrer que la convergeance est en fait uniforme.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Exercice 10. ($\star$) On considère l'équation fonctionnelle $(E)\colon\ f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$.

1. Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout x réel. À quelle condition sur h la fonction f est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant
$h_0 : x \mapsto 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}\left(h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$.

Pour $x \in [0,1]$, on pose $T_x : y \mapsto y - \dfrac{xy^2}{2}$.

3. Montrer que T_x est 1-lipschitizienne sur $[0,1]$ et que $[0,1]$ est stable par T_x.
4. Montrer que la suite $(h_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$
5. Montrer que l'équation (E) admet une solution continue non constante sur $[0,1]$.

Exercice 11. ($*$) Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les applications $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

1. Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).
2. Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 13. ($*$) Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Justifier que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que S est de classe $\mathscr{C}^1$, puis de classe $\mathscr{C}^\infty$.
3. Préciser les variations de S.
4. Simplifier la valeur de $S(x+1) + S(x)$ pour tout réel x strictement positif.
5. Donner un équivalent à S en 0 et en $+\infty$.

Exercice 14.

1. Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$.
2. Montrer que f est 1-périodique et qu'on a $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Exercice 15. On note $\mathbb{1}_I$ la fonction caractéristique de l'intervalle I définie par
$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série des fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$.

Exercice 16. ($*$) On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
2. Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 17. ($*$) Après avoir étudié l'ensemble de définition et la continuité de la somme de la série de fonction $\sum e^{-x\sqrt{n}}$, trouver sa limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 18. On étudie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ (bien définie par l'exercice 11).

1. ($*$) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner à l'aide d'une comparaison intégrale un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
3. En utilisant les valeurs $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, donner un DL2 de f au voisinage de 0.