TD n° 5 - Fonctions vectorielles

Exercice 1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \end{array} \right.$

1. $(*)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
2. Peut-on prolonger f en $(0,0)$?

Exercice 2. Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en l'origine ?

1. $(*)$ $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x} \sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$
2. $(\star)$ $(x,y,z) \mapsto \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Exercice 3. $(*)$ Montrer que l'orthogonal d'une partie d'un espace euclidien est un fermé.

Exercice 4. Soit A une partie non vide de E, un EPR.
Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,A) \end{array} \right.$ est 1-lipschitizienne.

Exercice 5. $(*)$ On note $E = \mathscr{C}^0([0,1])$ muni de sa norme 1 : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, soit $g \in E$.
Montrer que l'endomorphisme $T\colon f \mapsto fg$ est continue sur E.

Exercice 6. On note $E = \mathbb{R}[X]$ muni de sa norme 1 : $\|P = \displaystyle\sum_k a_k X^k\|_1 = \sum_k |a_k|$.

1. L'endomorphisme $\varphi : P \mapsto P'$ est-il continue ?
2. $(*)$ Montrer que φ induit un endomorphisme φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. $(*)$ L'endomorphisme φ_n est-il continue ?
4. Montrer que φ_n est lipschitzien et donner sa constante de Lipschitz.

Exercice 7. $(*)$ Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > f(x)\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < \ln(x^2+1) < 1\right\}$ est-il ouvert ? Fermé ?

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ continue, montrer que son graphe $G = \{(x,y) \in E \times F,\ y = f(x)\}$ est un fermé de $E \times F$.

Exercice 9. On note $E = \mathscr{C}^0([0,1])$ muni de la norme infinie. Montrer que $\left\{ f \in E, \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un fermé de E.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet un minimum.

Exercice 11. $(*)$ Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. $(*)$ On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est $\mathscr{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 13. $(*)$ Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.
2. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x, y) = (y \sin x, \cos x)$.

Exercice 14. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y) & \mapsto & xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \mapsto & 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16. $(*)$ On considère les applications suivantes :

$f : t \mapsto (2t^3 + e^t, \dfrac{4 + t}{t + 2}, \ln(-3 - t))$

$g : t \mapsto (2\cos(3t^2), \arcsin(\dfrac{1}{t})$

$L : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 3z)$

$\lambda : t \mapsto 2t$

$B : ((x, y, z), (a, b)) \mapsto (2x + 3a - b, 2y - z, x + b)$

Donner les domaines de dérivabilités et dériver les applications suivantes :

1. f
2. $f - 2f'$
3. $L \circ f$
4. $B(f, g)$
5. λf
6. $g \circ \lambda$
7. $\langle f \mid f' \rangle$ où $\langle . \mid . \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
8. $\det_{\mathscr{B}}(g, g')$ où $\mathscr{B} = ((1, 0), (1, 1))$

Exercice 17. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(\frac{1}{x}) \quad \text{où} \quad P_n \in \mathbb{R}[X].$$
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.