TD n°5 - Réduction des endomorphismes

Exercice 1. $(*)$ Donner les éléments propres des endomorphismes $\phi \in \mathscr{L}(E)$ pour

1. $E = \mathbb{K}[X]$ et $\phi(P) = XP'$
2. $E = \mathbb{K}[X]$ et $\phi(P) = XP$
3. $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées et $\phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 2. En considérant l'endomorphisme ϕ de $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ défini par $\phi(f) = (t \mapsto f''(-t))$, montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin(2x), \ldots, x \mapsto \cos(nx), x \mapsto \sin(nx)$ forment une famille libre de E.

Exercice 3. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 4. $(*)$ Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, et si oui donner leur réduction

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 7 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Dire pour quelles valeurs de a la matrice A est diagonalisable.

Exercice 6. Dire sans calculs pourquoi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et pourquoi la matrice $B = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Exercice 7. Réduire les matrices $J = (1)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. $(*)$ On note $\phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $\phi(M) = M + 2M^T$. Montrer que ϕ est diagonalisable et donner sa trace.

Exercice 9. $(*)$ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur de A^n pour tout n entier naturel, à l'aide d'une réduction.
2. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Donner la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10. $(*)$ Soit $(u_n)_n$ la suité définie par $u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 4$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n = 0,$
Donner la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites vérifiants les relations de récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}.$$

Exprimer $\forall n \in \mathbb{N}$ les valeurs u_n, v_n et w_n en fonction de n, et de u_0, v_0 et w_0

Exercice 12. On définit l'endomorphisme $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ par $\phi(P) = X(X-1)P' - nXP$.
Montrer qu'il induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui est diagonalisable.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -Id_E$.

1. Donner un exemple en dimension 2.
2. $(*)$ Montrer que f n'admet pas de vap réelle.
3. En déduire que $\dim(E)$ est paire.
4. $(*)$ Montrer que pour tout $x \neq 0$, $Vect(x, f(x))$ est stable par f.
5. Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$.
6. $(*)$ Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $(*)$ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^2 = A$.
2. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$. L'équation $M^2 = A$ admet-elle des solutions ? Si oui, les dénombrer.

Exercice 16. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $u(P) = nXP - (X^2-1)P'$.

1. Montrer que u induit en endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on note $\widetilde{u}$.
2. $(*)$ Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$.
3. En déduire une réduction de $\widetilde{u}$, puis calculer $\text{rg}(\widetilde{u})$ et $\det(\widetilde{u})$.