TD n°7 - Développement en série entière et applications

Exercice 1. $(*)$ Développer en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, puis préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $f_1 : x \mapsto \ln(1+2x^2)$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$
4. $f_4 : x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 2. $(*)$ Pour les séries suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme avec des fonctions usuelles :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}x^{2n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$

Exercice 3. $(*)$ Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. $(*)$ Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de cette somme.

Exercice 5. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

1. $(*)$ Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière dont f est la somme.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 6. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. $(*)$ Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale $f(0)=0$.
3. Montrer que f est DSE et donner le rayon de convergence.

Exercice 7. Soit $f : x \mapsto e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

1. $(*)$ Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. Justifier que f est DSE et donner ce développement.

Exercice 8. Soit $p \in \mathbb{N}$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. En étudiant $(1-x)f'(x)$, calculer $f(x)$

Exercice 9. Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geq 0$. Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 10. Montrer que les fonctions suivantes admettent en développement en série entière et préciser le rayon de convergence : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-\mathrm{sh}(x)}$

Exercice 11. Réaliser le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$ et reconnaitre cette fonction.

Exercice 12. Donner une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(E) : \qquad xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$$