Continuité

I Pour les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 À connaître

I. 1.1. La définition de continuité avec des quantificateurs :

f est continue en $a \in \mathbb{R}$ <u>ssi</u> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ <u>ssi</u>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

f est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ si f est continue en tout point $a \in I$.

I. 1.2. Notion de continuité à droite ou à gauche.

I. 1.3. Les domaines de continuité des fonctions usuelles.

2 Comment la montrer

I. 2.1. Par la définition

I. 2.2. Par les théorèmes généraux

I. 2.3. En la prolongeant par continuité

I. 2.4. Car elle est dérivable

I. 2.5. Car elle est limite simple d'une suite ou d'une série de fonctions continues convergent uniformément (sur tout segment)

Remarque 1

Pour les séries de fonctions de signe constant, on montre souvent la convergence normale pour montrer la convergence uniforme.
Pour les séries alternées on utilise souvent le CSSA et la convergence uniforme du reste.

I. 2.6. Si f est la somme d'une série entière, elle est continue sur le disque/intervalle ouvert de convergence

I. 2.7. Si la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie par une intégrale à paramètre

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur $I \times J$, où I et J sont des intervalles réels. On suppose que :

- $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux).
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Il existe une fonction φ, continue (par morceaux) et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J \ , \ \big|f(x,t)\big| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

3 Comment l'utiliser

I. 3.1. Théorème des valeurs intermédiaires

I. 3.2. Si f est continue et strictement monotone sur I, elle est injective sur I.

I. 3.3. Si f est continue sur I, f admet une primitive sur I, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

I. 3.4. Si f n'est pas continue et qu'elle est la limite simple d'une suite ou d'une série de fonctions continues, alors la convergence n'est pas uniforme.

I. 3.5. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

4 Exercices d'application de niveau 1

I. 4.1. I. 2.1. Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en $a \in \mathbb{Z}$.

I. 4.2. I. 2.2. Donner le domaine de continuité de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - x - 3)$

I. 4.3. I. 2.3. I. 2.2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable par continuité à tout $\mathbb{R}$.

I. 4.4. I. 2.1. I. 2.2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I. 4.5. I. 3.1. Après avoir calculé $f(0), f(1)$ et ses limites en $\pm\infty$, montrer que $f : x \mapsto x^3 + x^2 - 4x + 1$ admet au moins trois racines réelles.

I. 4.6. I. 2.5. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + xn^2}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et que la fonction S ainsi définie est continue sur ce domaine.

I. 4.7. I. 2.5. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + xn}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et que la fonction S ainsi définie est continue sur ce domaine.

I. 4.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, et on note f la somme de la série entière $\sum f_n$.

- I. 4.8.1 Donner le rayon de convergence de $\sum f_n$.
- I. 4.8.2 Étudier la convergence de la série lorsque $x = 1$ puis $x = -1$?
- I. 4.8.3 I. 2.5. Montrer que f est continue en -1.
- I. 4.8.4 I. 2.6. En déduire le domaine de continuité de f.

I. 4.9. I. 2.7. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5 Exercices d'application de niveau 2

I. 5.1. Trouver un contre exemple d'une fonction non continue pour chaque propriété de la partie "3 Comment utiliser la continuité".

I. 5.2. I. 2.3. Montrer que $x \mapsto \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ est prolongeable par continuité à tout $\mathbb{R}$.

I. 5.3. I. 3.1. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue, montrer que f admet au moins un point fixe.

I. 5.4. I. 3.2. Montrer que la fonction réciproque d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective impaire est aussi impaire. Que dire des fonctions paires ?

I. 5.5. I. 3.1. Si f est continue sur un intervalle I, montrer que $f(I)$ est un intervalle.
(*Indication : les intervalles de* $\mathbb{R}$ *sont les parties convexes de* $\mathbb{R}$)

I. 5.6. I. 3.4. Étudier la limite simple des $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$. Cette convergence est-elle uniforme ?

I. 5.7. On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1 - \frac{1}{n})x^n$

I. 5.7.1 Donner les rayons de convergence de f et g.

I. 5.7.2 I. 2.6. I. 2.5. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.

I. 5.7.3 Exprimer $(1 - x)f(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

I. 5.7.4 I. 2.3. Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $[-1, 1[$.

I. 5.8. I. 3.5. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

II Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Remarque 3

Tout cette partie s'adapte pour les fonctions $f : E \to F$ où E est un espace normé de dimension p et F est un espace normé de dimension n.
Bien entendu, ces techniques s'appliquent aussi pour les autres fonctions vectorielles, y compris pour les deux cas particulier $E = \mathbb{R}$ (arc paramétré) ou $F = \mathbb{R}$ (calcul différentiel) suivants.
Cette remarque est valable pour les autres classes de régularité.

1 À connaître

II. 1.1. La définition de continuité avec des quantificateurs :

f est continue en $a \in \mathbb{R}^p$ <u>ssi</u> $\lim_{x\to a} \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ <u>ssi</u>

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ \|x - a\|_{\mathbb{R}^p} \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon$$

f est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ si f est continue en tout point $a \in I$.

II. 1.2. Les applications polynomiales sont continues

II. 1.3. Les applications linéaires et multilinéaires en dimension finie sont continues

2 Comment la montrer

II. 2.1. En dimension finie, f est continue <u>ssi</u> ses applications partielles sont continues

II. 2.2. En majorant $\|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^n}$ par une fonction réelle en $\|x - a\|_{\mathbb{R}^p}$ qui tend vers 0 en 0.

II. 2.3. En montrant qu'elle est lipschitizienne

II. 2.4. Caractérisation séquentielle de la limite (plutôt utilisée pour montrer qu'une application n'est pas continue)

3 Exercices d'application

II. 3.1. II. 2.2. Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|xy|} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue en $(0, 0)$.

III Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

1 Comment la montrer

III. 1.1. la fonction est continue <u>ssi</u> ses composantes sont continues.

2 Exercices d'application

III. 2.1. III. 1.1. Donner le domaine de continuité de l'application $f : t \mapsto (\ln(t^2 - 1), \tan(t))$.

IV Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1 Comment l'utiliser

IV. 1.1. Pour montrer qu'un ensemble est ouvert en tant qu'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ par une application continue

IV. 1.2. Pour montrer qu'un ensemble est fermé en tant qu'image réciproque de $\mathbb{R}_+$ ou $\{0\}$ par une application continue

IV. 1.3. Théorème des bornes atteintes

2 Exercices d'application

IV. 2.1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

IV. 2.1.1 II. 2.1. Montrer que f est continue

IV. 2.1.2 II. 2.4. Peut-on la prolonger par continuité à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?

IV. 2.2. IV. 1.2. Montrer que le disque unité est un fermé.

IV. 2.3. II. 2.3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, montrer que l'application $d : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\| \end{array} \right.$ est continue.

IV. 2.4. II. 2.3. Montrer que la forme linéaire $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1) - f(0) \end{array} \right.$ est continue pour la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

IV. 2.5. Soit $f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.

IV. 2.5.1 IV. 1.2. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

IV. 2.5.2 IV. 1.3. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.

Dérivabilité

V Pour les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 À connaître

V. 1.1. La définition de la dérivabilité :

f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ <u>ssi</u> $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

f est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point $a \in I$.

V. 1.2. Notion de dérivabilité à droite ou à gauche.

V. 1.3. Les domaines de dérivabilité des fonctions usuelles.

V. 1.4. Les fonctions dérivées des fonctions usuelles

2 Comment la montrer

V. 2.1. Avec la définition

V. 2.2. Par les théorèmes généraux

V. 2.3. car f admet un développement limité à l'ordre 1 en a

3 Comment l'utiliser

V. 3.1. Si f est dérivable, alors elle est continue I. 2.4.

V. 3.2. Si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a

V. 3.3. Pour étudier les variations

V. 3.4. Pour rechercher des extremums

V. 3.5. Théorème de Rolle

V. 3.6. Théorèmes des accroissements finis (égalité et inégalité)

V. 3.7. Théorème de la limite de la dérivée

4 Exercices d'application de niveau 1

V. 4.1. Soit f définie par $x \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{R}_+ \\ -x^2 \text{ si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

V. 4.1.1 V. 1.2. Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

V. 4.1.2 I. 2.4. Montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

V. 4.2. V. 2.2. Donner le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)^3 + \cos(3x)}{\ln(2x^2)e^x}$

V. 4.3. V. 3.4. Donner les maxima et minima de $f : x \mapsto -x^3 + x^2 + 5x - 6$ sur $[-3, 3]$.

5 Exercices d'application de niveau 2

V. 5.1. V. 2.2. Calculer la dérivée $n$ième de $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

V. 5.2. V. 2.2. Soit $z = a + ib$ une racine $n$ième de l'unité, donner une formule simple de la dérivée $n$ième de $f : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$.

V. 5.3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ et $g : x \mapsto (x-2)e^x + (x+2)$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

- V. 5.3.1 V. 3.3. Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}_+$.
- V. 5.3.2 V. 3.7. Montrer que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
- V. 5.3.3 V. 2.2. Monter que $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$.
- V. 5.3.4 V. 3.3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
- V. 5.3.5 V. 3.6. On se donne une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln(2)$, et en déduire la limite de (u_n).

V. 5.4. V. 3.5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable n fois et qui s'annule en les points $a_0 < a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

VI Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

1 À connaître

f est dérivable en un point a si $x \mapsto \dfrac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))$ admet une limite finie en a

2 Comment la montrer

VI. 2.1. f est dérivable <u>ssi</u> ses composantes sont dérivables, et on dérive composante par composante

VI. 2.2. car f admet un développement limité à l'ordre 1

3 Comment l'utiliser

VI. 3.1. Si f est dérivable en un point, f admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point

VI. 3.2. Si f est dérivable, alors elle est continue

4 Exercices d'application

VI. 4.1. VIII. 1.1. Montrer que l'application $t \mapsto (\arcsin(2t-1), \ln(\frac{1}{t}))$ est dérivable sur un domaine que l'on précisera et donner sa dérivée.

Classe $\mathscr{C}^1$

VII Pour les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 Comment la montrer

VII. 1.1. Par les théorèmes généraux

VII. 1.2. Si la fonction f est limite simple d'une suite ou d'une série de fonctions

Théorème 4

On suppose que

- les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$
- les f_n' sont le terme général d'une suite ou d'une série de fonction convergent uniformément (sur tout segment) vers une fonction g

alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f' = g$

VII. 1.3. Si f est la somme d'une série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le même disque/intervalle ouvert de convergence

VII. 1.4. Si la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie par une intégrale à paramètre

Théorème 5

Soit f une fonction définie sur $I \times J$, où I et J sont des intervalles réels. On suppose que :

- $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur J.
- $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur J .
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
- Il existe une fonction φ, continue (par morceaux) et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J \ , \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et :

$$\forall x \in I \ , \ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

2 Comment l'utiliser

VII. 2.1. Théorème de la limite de la dérivée

3 Exercices d'application

VII. 3.1. I. 2.3. V. 3.7. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{ch}(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0, et que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

VII. 3.2. I. 3.3. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x e^t f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et calculer la valeur de sa dérivée.

VII. 3.3. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

VII. 3.3.1 VII. 1.2. Justifier que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

VII. 3.3.2 V. 3.3. Donner les variations de S.

VII. 3.4. VII. 1.4. Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. (*Indication :* Intégrale de Gauss)

VIII Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

1 Comment la montrer

VIII. 1.1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ <u>ssi</u> ses composantes sont de classe $\mathscr{C}^1$, et on dérive composante par composante

2 Comment l'utiliser

VIII. 2.1. Pour calculer la longueur d'un arc.

3 Exercices d'application

VIII. 3.1. VIII. 2.1. On considère la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ étudiée en cours. Donner la longueur de l'arc entre les points de paramètres 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

IX Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1 Comment la montrer

IX. 1.1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ <u>ssi</u> toutes ses dérivées partielles sont continues

2 Comment l'utiliser

IX. 2.1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la différentielle de f en tout point $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire (donc est continue).

IX. 2.2. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue

IX. 2.3. Règle de la chaîne

3 Exercices d'application

IX. 3.1. Soit $f : (x,y) \mapsto e^y(x^2+2xy)$.

IX. 3.1.1 IX. 1.1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et donner sa différentielle.

IX. 3.1.2 IX. 2.3. Montrer que $g : t \mapsto f(2t+1, t^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

IX. 3.2. IX. 1.1. Montrer que $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Classe $\mathscr{C}^k$

X Pour les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 Comment la montrer

X. 1.1. Par les théorèmes généraux

X. 1.2. Si la fonction f est limite simple d'une suite ou d'une série de fonctions

Théorème 6

On suppose

- les f_n sont de classe $\mathscr{C}^k$
- les $f_n^{(j)}$ sont le terme général d'une suite ou d'une série de fonctions convergent simplement vers une fonction g_j pour tout $j < k$
- les $f_n^{(k)}$ sont le terme général d'une suite ou d'une série de fonctions convergent uniformément (sur tout segment vers) une fonction g_k

alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ et $f^{(j)} = g_j$ pour tout $j \leq k$

X. 1.3. Si f est la somme d'une série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur le même disque/intervalle ouvert de convergence

X. 1.4. Si la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie par une intégrale à paramètre

Théorème 7

Soit f une fonction définie sur $I \times J$, où I et J sont des intervalles réels. On suppose que :

- $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t), \ldots, t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur J.
- $\forall t \in J$, $t \mapsto f(x,t)$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t), \ldots, x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur I.
- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t), \ldots, t \mapsto \dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ sont intégrables sur J .
- Il existe une fonction φ, continue (par morceaux) et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J \ , \ \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors la fonction $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, et :

$$\forall j \in [\![0,k]\!] \ , \ \forall x \in I \ , \ g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$$

2 Comment l'utiliser

X. 2.1. Formule de Leibniz

X. 2.2. Formule de Taylor-Young

3 Exercices d'application

X. 3.1. X. 2.1. Calculer la dérivée $n$ième de $x \mapsto e^x(x^2-3)$

X. 3.2. X. 2.2. Soit $f \in \mathscr{C}^3(I)$. Montrer que f admet un DL à l'ordre 2 en $a \in I$.

X. 3.3. X. 1.2. On pose $\zeta_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que ζ_2 est de classe $\mathscr{C}^k(]0,+\infty[)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

XI Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

1 Comment la montrer

XI. 1.1. f est de classe $\mathscr{C}^k$ ssi ses compostantes sont de classe $\mathscr{C}^k$, et les dérivées successives se font composantes par composantes

2 Exercices d'application

XI. 2.1. On considère $u, v, w \in \mathscr{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ et on suppose $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$

XI. 2.1.1 XI. 1.1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}$ est deux fois dérivable sur $[a,b]$.

XI. 2.1.2 V. 3.5. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$

XII Pour les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1 Comment l'utiliser

XII. 1.1. Théorème de Scwharz pour $k = 2$ (utilisé pour nier la classe $\mathscr{C}^2$ ou simplifier les équations différentielles aux dérivées partielles)

Classe $\mathscr{C}^{\infty}$

XIII Pour les fonctions réelles $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1 Comment la montrer

XIII. 1.1. Par les théorèmes généraux.

XIII. 1.2. En montrant qu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

XIII. 1.3. Si f est la somme d'une série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur le même disque/intervalle ouvert de convergence

2 Exercices d'application

XIII. 2.1. Soit $f:x\mapsto e^x(x^3-2)$.

XIII. 2.1.1 X. 2.1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée $n$ième pour tout n.

XIII. 2.1.2 X. 2.2. En déduire que f admet un DL à tout ordre en 0, et l'expliciter.

XIII. 2.2. Soit $f:x\mapsto\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

XIII. 2.2.1 V. 2.2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists P_n\in\mathbb{R}\left[X\right],\ \forall x\neq 0,\ f^{(n)}(x)=P_n(\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$

XIII. 2.2.2 I. 1.2. En déduire que $f\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

XIII. 2.3. XIII. 1.3. Montrer que $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

XIII. 2.4. XIII. 1.2. X. 1.2. Montrer que la fonction $\zeta=x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]1,+\infty[$.

XIII. 2.5. XIII. 1.2. X. 1.4. Montrer que l'application $g:x\mapsto\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+$