I À savoir faire

1 Propriétés et théorèmes

En **gras** : démonstration à savoir refaire
Si *, il existe une version pour Ω fini et une pour Ω dénombrable

I. 1.1. Propriétés de calculs des probabilités

- I. 1.1.1 $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- I. 1.1.2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- I. 1.1.3 Si $B \subset A$, $P(B) \leq P(A)$ (croissance des probabilités)
- I. 1.1.4 continuité croissante
- I. 1.1.5 continuité décroissante
- I. 1.1.6 sous-additivité

I. 1.2. Formule des probabilités totales *

I. 1.3. Formule de Bayes

I. 1.4. Formule des probabilités composées

I. 1.5. Croissance * et linéarité de l'espérance

I. 1.6. Positivité de la variance

I. 1.7. Formule de transfert *

I. 1.8. **Formule de König-Huygens**

I. 1.9. Propriétés de calculs des variables indépendantes : si $X \perp Y$ alors (réciproques fausses)

- I. 1.9.1 $E(XY) = E(X)E(Y)$
- I. 1.9.2 $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
- I. 1.9.3 $\forall t \in [-1,1]\, G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$
- I. 1.9.4 Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ alors $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$
- I. 1.9.5 $Cov(X,Y) = 0$

I. 1.10. Inégalité de Markov

I. 1.11. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

I. 1.12. Loi faible des grands nombres

I. 1.13. Opérations laissants stables une tribu

I. 1.14. La famille des issues associées à une variable aléatoire forme un SC(D)E

I. 1.15. X à valeur dans $\mathbb{N}$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 1} P(X \geq n)$ converge et alors

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

I. 1.16. **La série génératrice d'une va CVN sur** $[-1, 1]$

I. 1.17. **La fonction génératrice est continue sur** $[-1, 1]$ **et** $\mathscr{C}^{\infty}$ **sur** $]-1, 1[$

I. 1.18. X est d'espérance finie ssi G_X dérivable à gauche en 1 avec $E(X) = G'_X(1)$

I. 1.19. X admet une variance ssi G_X est deux fois dérivable à gauche en 1

I. 1.20. **Inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'espérance**

2 Définitions

I. 2.1. événement

- I. 2.1.1 élémentaire/issue
- I. 2.1.2 impossible
- I. 2.1.3 négligeable
- I. 2.1.4 certain
- I. 2.1.5 presque sûr
- I. 2.1.6 contraire
- I. 2.1.7 incompatibles
- I. 2.1.8 équiprobables
- I. 2.1.9 indépendants
- I. 2.1.10 mutuellement indépendants
- I. 2.1.11 dénombrable

I. 2.2. système complet (dénombrable) d'événements

I. 2.3. système quasi-complet d'événements

I. 2.4. Probabilité *

- I. 2.4.1 uniforme
- I. 2.4.2 conditionnelle

I. 2.5. Variable aléatoire *

- I. 2.5.1 centrée
- I. 2.5.2 réduite
- I. 2.5.3 image d'une va
- I. 2.5.4 événement associé à une va
- I. 2.5.5 loi d'une va
- I. 2.5.6 loi conditionnelle d'une va
- I. 2.5.7 espérance d'une va *
- I. 2.5.8 variance d'une va
- I. 2.5.9 écart-type d'une va

I. 2.5.10 covariance de deux va

I. 2.5.11 coefficient de corrélation de deux va

I. 2.5.12 loi conjointe de deux va

I. 2.5.13 lois marginales d'un couple de va

I. 2.5.14 indépendantes

I. 2.5.15 mutuellements indépendantes *

I. 2.5.16 fonction de répartition d'une va

I. 2.5.17 fonction génératrice d'une va

I. 2.6. tribu

I. 2.7. Lois usuelles pour lesquelles on doit connaître l'image, les valeurs possibles des paramètres, la définition, l'espérance, la variance et la fonction génératrice

I. 2.7.1 loi uniforme

I. 2.7.2 loi de Bernoulli

I. 2.7.3 loi binomiale

I. 2.7.4 loi géométrique

I. 2.7.5 loi de Poisson

3 Méthodes

I. 3.1. Montrer qu'une application est une probabilité

I. 3.2. Reconnaitre une situation à modéliser par une variable aléatoire suivant

I. 3.2.1 une loi de Bernoulli

I. 3.2.2 une loi binomiale

I. 3.2.3 une loi géométrique

I. 3.3. Utiliser les intersection, union et complémentaire d'événements simples pour modéliser un événement.

I. 3.4. Exprimer une loi conjointe à partir des lois conditionnelles.

I. 3.5. Exprimer les lois marginales à partir de la loi conjointe d'un couple de va.

I. 3.6. Utiliser un système complet d'événements

I. 3.6.1 Pour la formule des probabilités totales

I. 3.6.2 Pour trouver la probabilité d'un événement

I. 3.1. en utilisant $P(Ai) = 1 - \sum_{k \neq i} P(A_k)$ si (A_i) SCE

I. 3.2. en utilisant une décomposition

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \text{ ou } P(X \in A) = \sum_{x \in X(\omega) \cap A} P(X = x)$$

I. 3.7. Utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir une relation de récurrence sur des probabilités d'événements.

I. 3.8. Calculer la probabilité d'une intersection d'événements

- I. 3.8.1 En utilisant l'indépendance
- I. 3.8.2 En utilisant la formule des probabilités composées
- I. 3.8.3 Par la propriété de continuité décroissante des probabilités

I. 3.9. Calculer la probabilité d'une union d'événements

- I. 3.9.1 En utilisant l'incompatibilité
- I. 3.9.2 Par la propriété de continuité croissante des probabilités

I. 3.10. Utiliser la formule de Bayes pour inverser un conditionnement.

I. 3.11. Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance

- I. 3.11.1 avec la définition
- I. 3.11.2 avec la propriété I. 1.15.
- I. 3.11.3 grâce à la fonction génératrice

I. 3.12. Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance

- I. 3.12.1 en citant I. 1.7. et I. 1.8.)
- I. 3.12.2 grâce à la fonction génératrice

I. 3.13. Reconnaître un développement en série entière pour exprimer une fonction génératrice.

I. 3.14. Passer de la loi, à la fonction de répartition ou à la fonction génératrice, dans les deux sens

I. 3.15. Montrer l'indépendance (resp. la mutuelle indépendance) de deux (resp. de n) événements ou deux (resp. de n) variables aléatoires (resp. de n)

- I. 3.15.1 Par le calcul
- I. 3.15.2 Dans la modélisation

I. 3.16. Interpréter une limite de valeur.

4 Propriétés à s'entraîner à montrer pour valider les acquis

I. 4.1. Montrer qu'une probabilité conditionnelle définit une probabilité.

I. 4.2. $A \perp B$ si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

I. 4.3. $V(aX + b) = a^2 V(X)$

I. 4.4. Montrer que les deux définitions de l'indépendances suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} X \perp Y &\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y) \\ &\Leftrightarrow \forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

I. 4.5. Si $X \perp Y$ avec $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$

I. 4.6. La fonction de répartition est croissante

I. 4.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

I. 4.8. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

I. 4.9. Si X admet un moment d'ordre 2, alors X est d'espérance finie.

I. 4.10. Si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1, exprimer la variance de X en fonction de G_X.

I. 4.11. Si les X_k admettent une variance, alors $V(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

I. 4.12. Montrer que la loi géométrique est sans mémoire :

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors $\forall k, n \in \mathbb{N}, P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$

II Exercices d'application

1 Exercices de modélisation

II. 1.1. On lance une pièce truquée renvoyant Pile avec probabilité 1/3 (resp. p). Donner la loi des variables aléatoires suivantes

- II. 1.1.1 I. 3.2.1 X_1 renvoyant 1 si la pièce donne Pile, et 0 sinon
- II. 1.1.2 I. 3.2.1 X_2 renvoyant -1 si la pièce donne Pile, et 1 sinon
- II. 1.1.3 I. 3.2.2 X_3 renvoyant le nombre de Pile si on lance $2n$ fois la pièce
- II. 1.1.4 On lance la pièce jusqu'à obtenir un Face
  - II. 1.1. I. 3.2.3 X_4 renvoyant le rang de l'apparition de Face
  - II. 1.2. X_5 le nombre de fois où Pile est apparu sachant $X_4 = k$
- II. 1.1.5 On lance la pièce jusqu'à obtenir n fois Face
  - II. 1.1. X_6 le nombre de lancers

II. 1.2. On lance $2n$ fois la pièce, on note F_k l'événement "obtenir Face au $k$ème lancer". Exprimer les événements suivants en fonction des F_k :

- II. 1.2.1 I. 3.3. A_1 : "on obtient une alternance parfaite de Pile et de Face"
- II. 1.2.2 I. 3.3. A_2 : "on obtient exactement un Pile"
- II. 1.2.3 I. 3.3. A_3 : "on n'obtient jamais Pile suivi de Face"
- II. 1.2.4 à l'aide de X_3, exprimer l'événement A_4 : "Il y a eu plus de Pile que de Face"

2 Exercices de niveau 1

II. 2.1. On se donne $(\Omega, P, \mathscr{A})$ un espace probabilisé, $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ $A, B \in \mathscr{A}$, X une variable aléatoire sur Ω.

Dire quelles sont les phrases qui ont du sens. Si elles en ont, l'interpréter et donner la nature de l'objet écrit, sinon, dire pourquoi elles n'ont pas de sens :

II. 2.1.1 $P(A \cup B)$

II. 2.1.2 $P(A) \cup P(B)$

II. 2.1.3 $P(A) + P(B)$

II. 2.1.4 $P(A + B)$

II. 2.1.5 $P(X)$

II. 2.1.6 $P(X = A)$

II. 2.1.7 $P(X \in A)$

II. 2.1.8 $P(X \leq A)$

II. 2.1.9 $P(X = \omega)$

II. 2.1.10 $P(X = k)$

II. 2.1.11 $P(X > k)$

II. 2.2. I. 3.15.2 On lance $2n$ fois la pièce de l'exercice II. 1.1., et on note F_k l'événement "obtenir Face au $k$ème lancer". Donner la probabilité des événements :

II. 2.2.1 I. 3.8.1 A_1 : "on obtient une alernance parfaite du Pile et de Face"

II. 2.2.2 I. 3.8.1 A_2 : "on obtient exactement un Pile"

II. 2.2.3 I. 3.9.1 A_3 : "on n'obtient jamais Pile suivi de Face"

II. 2.3. Une urne contient n boules noires et b boules blanches, qu'on tire toutes une à une sans remise. Donner la probabilité des événements :

II. 2.3.1 I. 3.3. I. 3.8.2 "La première boule tirée est noire, la seconde est blanche"

II. 2.3.2 I. 3.3. I. 3.8.2 "On tire d'abord toutes les boules blanches, puis toutes les boules noires"

II. 2.3.3 I. 3.3. I. 3.8.2 "On tire d'abord toutes les boules d'une couleur, puis toutes celles de l'autre couleur"

II. 2.3.4 I. 3.3. I. 3.8.2 "On tire chaque fois une boule de couleur différente de la précédente"

II. 2.3.5 I. 3.15.2 I. 3.8.1 Mêmes questions mais avec remise.

On tire maintenant $k \leq b + n$ boules sans remise

II. 2.3.6 I. 3.3. Quelle est la probabilité de tirer toutes les blanches ?

II. 2.3.7 I. 3.3. Quelle est la probabilité de tirer exactement une blanche ?

II. 2.3.8 I. 3.3. Quelle est la probabilité de tirer au plus une blanche ?

II. 2.4. Tous les jours pendant ses vacances, Mme Caure prépare soit un exercice d'algèbre, soit un exercice de probabilité pour ses fiches de révision. Le premier jour elle prépare un exercice d'algèbre. Si elle prépare un matin un exercice d'algèbre, alors elle en prépare un le lendemain avec probabilité $\frac{3}{4}$; mais si elle prépare un exercice de probabilité, elle en prépare un le lendemain avec probabilité $\frac{4}{5}$.

II. 2.4.1 I. 3.6.1 Mettre en évidence un SCE (A_n, B_n) dépendant du jours n.

II. 2.4.2 I. 3.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité de A_{n+1}, puis celle de B_{n+1}, en fonction des probabilités de A_n et B_n.

II. 2.4.3 I. 3.16. Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$, qu'en déduire ?

II. 2.5. On lance un dé truqué tel que la probabilité d'obtenir la face $k \in [\![1, 6]\!]$ soit proportionnel à k. En notant X la valeur de la face obtenue, on a donc $P(X = k) = \lambda k$.

II. 2.5.1 I. 3.2. Donner la valeur de λ.

II. 2.5.2 I. 3.11.1 I. 3.12.1 Calculer l'espérance et la variance de X.

II. 2.6. Dans une usine, trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces. La machine A produit 3% de pièces déféctueuses, la machine B 4% et la machine C en produit 5%.

II. 2.6.1 I. 3.6.1 Mettre en évidence un SCE. En déduire la probabilité qu'une pièce soit déféctueuse.

II. 2.6.2 I. 3.10. On choisit une pièce au hasard, et elle est déféctueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

II. 2.7. Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n animaux de compagnie est donnée par la formule $p_n = a\frac{2^n}{n!}$. On suppose qu'il est équiprobable de choisir un chat ou un autre animal.

II. 2.7.1 I. 3.2. Déterminer la valeur de a.

II. 2.7.2 I. 3.6.1 I. 3.1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un chat.

II. 2.7.3 I. 3.10. On suppose qu'une famille a exactement un chat. Quelle est la probabilité que la famille ait adopté deux animaux de compagnie ?

II. 2.8. On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois Face et une fois Pile. On note X le nombre de lancers avant que le jeu cesse.

II. 2.8.1 I. 3.15.2 I. 3.8.3 Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

II. 2.8.2 I. 3.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $P(X > n)$.

II. 2.8.3 I. 1.15.En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance et déterminer celle-ci.

II. 2.9. À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

II. 2.9.1 I. 3.2.2 Déterminer la loi de X_1.

II. 2.9.2 I. 2.7. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2 = n - X_3$

II. 2.9.3 I. 4.11. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

II. 2.10. On lance 5 dés équilibrés, ceux qui ont la face 1 sont mis de côté, et on relance les autres jusqu'à obtenir cinq faces 1. Pour $i \in [\![1, 5]\!]$, on note X_i le nombre de lancers nécessaires du dé i pour obtenir la face 1. On note $T = \max(X_1, \dots, X_5)$.

II. 2.10.1 I. 3.2.3 Donner la loi des X_i.

II. 2.10.2 Que modélise la variable aléatoire T ?

II. 2.10.3 I. 3.3. I. 3.15.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T \leq n)$.

II. 2.10.4 I. 1.15. En déduire que T admet une espérance et la calculer.

II. 2.11. Soit X, Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

II. 2.11.1 I. 3.4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

II. 2.11.2 I. 3.5. Reconnaitre la loi de Y.

II. 2.12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi conjointe vérifie $\forall j, k \in \mathbb{N}$, $P(X = j, Y = k) = \dfrac{a}{j!k!}$.

II. 2.12.1 I. 3.2. Déterminer la valeur de a.

II. 2.12.2 I. 3.5. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

II. 2.12.3 I. 1.9. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

II. 2.13. Soit $\lambda > 0$, on note $S(t)$ la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$. On se donne X une variable aléatorie à valeur dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \lambda S(t)$.

II. 2.13.1 Donner le rayon de convergence de la série, et montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $S(t) = (t+1)^2 e^t$.

II. 2.13.2 I. 2.5.17 Calculer $G_X(1)$; et en déduire la valeur de λ.

II. 2.13.3 I. 3.14. Donner la loi de X.

II. 2.13.4 I. 3.11.3 Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

II. 2.13.5 I. 3.12.2 Montrer que X admet une variance et retrouver sa valeur par le calcul.

II. 2.14. On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à 1/2. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population. On suppose qu'une génération en âge de procréer est constituée de N couples, et on note $X_1, \cdots, X_N$ le nombre d'enfants respectif de chaque couple. On note enfin P la proportion de garçons issus de cette génération.

II. 2.14.1 I. 3.2.3 Donner la loi de la variable aléatoire X.

II. 2.14.2 Montrer que $P = \dfrac{1}{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{N}}$

II. 2.14.3 I. 1.12. I. 3.16. Quelle est la limite de P lorsque N tend vers l'infini. Qu'en pensez-vous ?

3 Exercices de niveau 2

II. 3.1. I. 3.3. Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

II. 3.2. Mme Caure occupe ses journées à dormir, manger, ou préparer des exercices, et on peut considérer qu'elle pratique ces activités par tranches de 10min.

- Après 10min de repas, elle continue de manger avec probabilité $\frac{1}{2}$, et sinon se met à travailler.
- Après 10min de repos, elle continue de dormir avec probabilité $\frac{3}{4}$, sinon elle a faim au réveil et va manger.
- Après 10min de travail, soit elle va manger avec probabilité $\frac{1}{4}$, soit elle est fatiguée et s'endort.

Au réveil elle commence par petit déjeuner, ce qui marque le début de sa journée. On note m_n la probabilité pour qu'elle mange entre les minutes $10n$ et $10n+10$, d_n celle qu'elle dorme et t_n celle qu'elle travail. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

II. 3.2.1 I. 3.7. Trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$.

II. 3.2.2 Calculer $4M^3 - 5M^2$ puis en déduire un polynôme annulateur de M.

II. 3.2.3 Calculer les puissances de M.

II. 3.2.4 I. 3.16. En déduire les limites de m_n, d_n et t_n, puis interpréter.

II. 3.3. I. 3.2. Soit X et Y deux vard, calculer $P(X = Y)$ dans le cas où $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$ puis dans le cas où $X, Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$. I. 3.16. Interpréter ces résultats lorsque n tend vers $+\infty$

II. 3.4. I. 3.10. Dans une population donnée, un individu sur 8 est blond. On sait en outre que deux blonds sur trois ont les yeux bleus et que 80% des individus qui ont les yeux bleus sont blonds. Quelle est la proportion des individus qui ne sont pas blonds mais qui ont les yeux bleus ?

II. 3.5. I. 3.3. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, 2p]\!]$. Avec quelle probabilité le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ est-il pair ?

II. 3.6. I. 3.2. On considère une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\{n\}) = 0$

II. 3.7. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

II. 3.7.1 I. 3.8.2 Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

II. 3.7.2 I. 3.8.3 Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

II. 3.8. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $s > 1$.

II. 3.8.1 I. 3.2. Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ la famille $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

II. 3.8.2 I. 3.15.1 Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $A_p = p\mathbb{N}^* = \{pk, k \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que les $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont des événements mutuellement indépendants pour la loi précédente.

Indication : Si $p_1, \dots, p_m$ sont des nombres premiers distincts et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall i \in [\![1, m]\!], p_i | n \Leftrightarrow p_1 \times \cdots \times p_m | n$$

II. 3.9. I. 1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$ après avoir remontré la relation $\dbinom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

II. 3.10. I. 3.2. Soit $X, Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ indépendantes. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

II. 3.11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi conjointe vérifie $\forall j, k \in \mathbb{N}$, $P(X = j, Y = k) = a\dfrac{j+k}{2^{j+k}}$.

II. 3.11.1 I. 3.2. Déterminer la valeur de a.

II. 3.11.2 I. 3.5. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

II. 3.11.3 I. 1.9. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

II. 3.11.4 I. 3.2. Calculer $P(X = Y)$.

II. 3.12. Une urne contient 4 boules rapportant respectivement 0, 1, 1, ou 2 points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note X_i le score obtenu au $i$ème tirage, et on pose $S = X_1 + \cdots + X_n$.

II. 3.12.1 I. 3.15.2 Justifier que les X_i sont indépendantes. Que modélise S ?

II. 3.12.2 I. 2.5.17 I. 1.7. Donner la fonction génératrice de la variable X_1.

II. 3.12.3 I. 1.9. Déterminer la fonction génératrice de S.

II. 3.12.4 I. 3.14. En déduire la loi de S.

II. 3.13. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est définie par $P(X = k) = a\dbinom{n+k}{k}p^k$.

II. 3.13.1 I. 3.14. I. 3.13. Montrer que la fonction génératrice de X vérifie pour tout $t \in [-1; 1]$, $G_X(t) = \dfrac{a}{(1-pt)^{n+1}}$.

II. 3.13.2 I. 2.5.17 Calculer $G_X(1)$; et en déduire la valeur de a.

II. 3.13.3 I. 3.11.3 Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

II. 3.13.4 I. 3.12.2 Montrer que X admet une variance et retrouver sa valeur par le calcul.