$\mathcal{P}$ropriété 1

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev, tel qu'on a la décomposition $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.
On se donne n applications linéaires $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ de E_i dans F.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i, u_{|E_i} = u_i$.
On a en outre pour tout $e_i \in E_i$

$$u(e_1 + \cdots + e_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(e_i)$$

Démonstration : On procède par analyse-synthèse.

— (Analyse) : on suppose qu'une telle application u existe. Soit un vecteur $e \in E$; en le décomposant sous la forme $e = e_1 + \ldots + e_n$ de E, on a

$$\begin{aligned} u(e) &= \sum_{i=1}^{n} u(e_i) && \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} u_i(e_i) && (u \equiv u_i \text{ sur } E_i) \end{aligned}$$

ce qui donne explicitement $u(e)$ pour tout $e \in E$, et détermine donc entièrement u, et comme la décomposition en somme directe est unique, $u(e)$ est uniquement définie.

— (Synthèse) Définissons u par la formule obtenue dans l'analyse ci-dessus et montrons qu'elle convient. Tout d'abord, si $e \in E_i$, sa décomposition est donnée par $e_i = e$ et $e_j = 0_E$ pour tout $i \neq j$. En particulier, $u_j(e_i) = 0_F$ sauf pour $i = j$ si bien que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \forall e = e_i \in E_i \qquad u(e) = \sum_{j=1}^{n} u_j(e_i) = u_i(e_i) = u_i(e)$$

Ainsi u coïncide bien avec u_i sur E_i.
Il reste à montrer que u est linéaire. Pour cela, on remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)$$

où $x = \sum x_i$ et $y = \sum y_i$ sont des décompositions selon $E_1 + \cdots + E_n$. Mais alors

$$\begin{aligned} u(x + \lambda y) &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i + \lambda y_i) && \text{(définition de } u\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i(x_i) + \lambda u_i(y_i)\right) && \text{(linéarité de } u_i\text{)} \\ &= u(x) + \lambda u(y) && \text{(séparation en deux sommes)} \end{aligned}$$

■

Théorème 2 (*Déterminant triangulaire par blocs*)

Si une matrice est triangulaire par blocs, alors son déterminant est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Théorème 3 (*lemme*)

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A, C, M matrices carrées, alors $\det(M) = \det(A) \times \det(C)$.

Démonstration : (du lemme) On procède par récurrence sur la taille q de $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

— (Initialisation) Pour le cas $q = 1$, la matrice A est réduite à un seul coefficient $a_1 1$ qui est aussi égal à son déterminant, tandis que B est une ligne. En développant $\det(M)$ par rapport à sa première colonne on a donc $\det(M) = a_{11} \det(C) = \det(A) \det(C)$.

— (Hérédité) Pour $q \geq 1$ fixé, on suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée N de la forme $N = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}$ avec E matrice carrée et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On se donne une matrice carrée $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A de taille $q+1$ et C carrée. On développe par rapport à la première colonne de M :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\hat{M_{i,1}})$$

Or la matrice $\hat{M_{i,1}}$ étant obtenue à partir de M par suppression de la première colonne et de la i-e ligne, elle s'écrit par blocs

$$\hat{M_{i,1}} = \begin{pmatrix} \hat{A_{i,1}} & \hat{B_i} \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Comme $\hat{A_{i,1}} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $N = \hat{M_{i,1}}$ pour obtenir

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\hat{A_{i,1}}) \det(C) = \det(A) \det(C)$$

en reconnaissant le développement par blocs de $\det(A)$ par rapport à sa première colonne. ■

Démonstration : (du théorème) On procède par récurrence sur le nombre p de blocs diagonaux.

— (Initialisation) Pour $p = 1$, c'est clair et pour $p = 2$ c'est le résultat du lemme ci-dessus.

— (Hérédité) On suppose le résultat vrai pour $p - 1$ blocs diagonaux. On se donne

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & M_{pp} \end{pmatrix}$$

D'après le lemme, appliqué à $M' = \begin{pmatrix} M_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & M_{p-1,p-1} \end{pmatrix}$ et $C = M_{pp}$, on a

$$\det(M) = \det(M') \times \det(M_{pp})$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à M' (qui a bien $p-1$ blocs diagonaux dans sa structure triangulaire par blocs) on a

$$\det(M') = \det(M_{11}) \times \cdots \times \det(M_{p-1,p-1})$$

ce qui achève la récurrence. ■