I À savoir faire

1 Propriétés et théorèmes

En **gras** : démonstration à savoir refaire

I. 1.1. **Identités remarquables et de polarisation**

I. 1.2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

I. 1.3. **Inégalités triangulaire**

I. 1.4. Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs est le vecteurs nul

I. 1.5. Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est libre

I. 1.6. Théorème de Pythagore

I. 1.7. L'orthogonal d'un sev est supplémentaire à ce sev

I. 1.8. Expression dans une BON : des coordonées, du produit scalaire, d'un projecteur orthonormal

I. 1.9. Caractérisation des projecteurs orthogonaux : par le produit scalaire, par la matrice dans une BON

I. 1.10. Théorème de minimisation

I. 1.11. Inégalité de Bessel

I. 1.12. Comparaison des normes usuelles de $\mathbb{R}^n$.

I. 1.13. En dimension finie, propriétés qui ne dépendent pas du choix de la norme

I. 1.14. Une intersection de fermés est fermée, une union finie de fermés est fermée

I. 1.15. Une union d'ouverts est ouverte, une intersection finie d'ouverts est ouverte

I. 1.16. **Si u est une isométrie, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$**

I. 1.17. Les seules isométries diagonalisables sont les symétries orthogonales

I. 1.18. Caractérisations des matrices orthogonales

I. 1.19. Procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt

I. 1.20. Théorème spectral

I. 1.21. Théorème de représentation de Riesz

I. 1.22. **Deux formes linéaires ont le même noyau ssi elles sont proportionnelles**

2 Définitions

I. 2.1. Produit scalaire

I. 2.2. Norme

- I. 2.2.1 associée à un produit scalaire

I. 2.3. Vecteur

- I. 2.3.1 Unitaire ou normé
- I. 2.3.2 Orthogonaux
- I. 2.3.3 normal à un hyperplan

I. 2.4. Famille de vecteurs

- I. 2.4.1 orthogonale
- I. 2.4.2 orthonormée ou orthonormale
- I. 2.4.3 base orthonormale

I. 2.5. Sous-ensemble

- I. 2.5.1 orthogonaux entre eux
- I. 2.5.2 ouvert
- I. 2.5.3 fermé
- I. 2.5.4 convexe
- I. 2.5.5 borné
- I. 2.5.6 intérieur
- I. 2.5.7 adhérence
- I. 2.5.8 frontière
- I. 2.5.9 groupe orthogonal
- I. 2.5.10 groupe spécial orthogonal

I. 2.6. Sous-espace vectoriel

- I. 2.6.1 pré-hilbertien
- I. 2.6.2 euclidien
- I. 2.6.3 supplémantaire orthogonal
- I. 2.6.4 orthogonal d'un ensemble
- I. 2.6.5 caractéristiques des
  - I. 2.1. projecteur orthogonal
  - I. 2.2. symétrie orthogonale
  - I. 2.3. isométrie vectorielle
- I. 2.6.6 des endomorphismes symétriques $\mathscr{S}(E)$ (+ dimension)
- I. 2.6.7 orienté
- I. 2.6.8 hyperplan

I. 2.7. Norme

I. 2.7.1 euclidienne

I. 2.7.2 induite

I. 2.8. Application

I. 2.8.1 bornée

I. 2.8.2 distance

I. 2.8.3 projecteur orthogonal

I. 2.8.4 symétrie orthogonale

I. 2.8.5 rotation en dimension 2 ou 3

I. 2.8.6 produit mixte

I. 2.8.7 produit vectoriel

I. 2.8.8 endomorphisme symétrique

I. 2.9. Matrice

I. 2.9.1 orthogonale

I. 2.9.2 spéciale orthogonale

I. 2.9.3 d'une rotation en dimension 2 ou 3

I. 2.9.4 d'une symétrie orthogonale en dimension 2

I. 2.10. **Produit scalaire canonique de**

I. 2.10.1 $\mathbb{R}^n$

I. 2.10.2 $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

I. 2.11. **Normes à connaître :**

I. 2.11.1 Sur $\mathbb{R}^n$: $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$

I. 2.11.2 Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$: $\|.\|_\infty$

3 Méthodes

I. 3.1. Montrer qu'une application est un produit scalaire.

Pour montrer la définie-positivité :

I. 3.1.1 Si c'est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$:

I. 3.1. Faire apparaître des carrés

I. 3.2. Faire apparaître une somme de termes positifs

I. 3.1.2 Si c'est un produit scalaire de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$:

I. 3.1. Utiliser la positivité de l'intégrale

I. 3.1.3 Si c'est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$:

I. 3.1. Mettre en évidence plus de racines (avec mutiliplicité) que le degré

I. 3.2. Montrer l'orthogonalité :

- I. 3.2.1 de deux vecteurs
- I. 3.2.2 d'une famille de vecteurs
- I. 3.2.3 Montrer que deux parties sont orthogonales
- I. 3.2.4 Montrer qu'un vecteur est orthogonal à une partie

I. 3.3. Donner l'orthogonal d'une partie.

I. 3.4. Montrer qu'une famille de vecteurs est une base orthonormale

- I. 3.4.1 Car orthonormale + cardinal
- I. 3.4.2 Car base + orthonormée

I. 3.5. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt

I. 3.6. Montrer qu'un projecteur est un projecteur orthogonal

- I. 3.6.1 par définition
- I. 3.6.2 par le produit scalaire
- I. 3.6.3 par sa matrice dans une BON

I. 3.7. Exprimer le projecteur orthogonal sur un sev

- I. 3.7.1 grâce à une BON
- I. 3.7.2 En résolvant un système linéaire de conditions

I. 3.8. Calculer la distance entre un vecteur et un sev

I. 3.9. Montrer qu'une partie est fermée

- I. 3.9.1 par définition
- I. 3.9.2 par caractérisation séquentielle
- I. 3.9.3 car complémentaire d'un ouvert
- I. 3.9.4 car image réciproque de $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}-$, par une application continue $E \to \mathbb{R}$

I. 3.10. Montrer qu'une partie est ouverte

- I. 3.10.1 par définition
- I. 3.10.2 car complémentaire d'un fermé
- I. 3.10.3 car image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, par une application continue $E \to \mathbb{R}$

I. 3.11. Montrer qu'une partie est bornée

I. 3.12. Montrer qu'une partie est convexe

I. 3.13. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à un cas particulier pour prouver une inégalité

I. 3.14. Utiliser la propriété I. 1.4. pour passer d'une égalité scalaire à une égalité vectorielle

I. 3.15. Montrer qu'une application est une norme

I. 3.16. Montrer qu'une application est une isométrie

I. 3.16.1 par le produit scalaire

I. 3.16.2 par la norme

I. 3.16.3 par l'image des BON

I. 3.16.4 par sa matrice dans une BON

I. 3.17. Montrer qu'une matrice est orthogonale

I. 3.17.1 Car matrice d'une isométrie dans une BON

I. 3.17.2 Car son inverse est sa transposée

I. 3.17.3 Car ses colonnes (ses lignes) forment une BON de $\mathbb{R}^n$ canonique

I. 3.17.4 En tant que matrice de passage entre deux BON

I. 3.18. Caractériser les isométries

I. 3.19. Montrer qu'une application est symétrique

I. 3.19.1 par le produit scalaire

I. 3.19.2 par sa matrice dans une BON

I. 3.20. Montrer qu'un sev est un hyperplan

I. 3.20.1 Par sa dimension

I. 3.20.2 Comme supplémentaire d'une droite

I. 3.20.3 Comme noyau d'une formule linéaire non nulle

4 Propriétés à s'entraîner à montrer pour valider les acquis

I. 4.1. L'orthonogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel

I. 4.2. Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$

I. 4.3. $x \in Vect(x_1, \ldots, x_p)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \langle x \mid x_i \rangle = 0$

I. 4.4. $F \oplus F^\perp = E$ si F sev de E.

I. 4.5. Deux sev orthogonaux sont en somme directe.

I. 4.6. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

I. 4.7. Si p est le projecteur orthogonale sur F, alors $Id_E - p$ est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

I. 4.8. Montrer que les boules sont convexes.

I. 4.9. Le seul espace vectoriel borné est $\{0\}$.

I. 4.10. Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie

I. 4.11. Montrer qu'un projecteur orthogonal est symétrique

I. 4.12. Montrer qu'un endomorphisme à la fois symétrique et orthogonal est une symétrie vectorielle.

I. 4.13. Montrer qu'une isométrie est un automorphisme

I. 4.14. Montrer les équivalences entre les différentes caractérisation des isométries

I. 4.15. Si $M \in O(n)$ alors $\det(M) = \pm 1$

I. 4.16. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique, alors $\ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires.

I. 4.17. Si F est stable par u un endomorphisme orthogonal, alors $F^\perp$ est stable par u.

I. 4.18. Si F est stable par u un endomorphisme symétrique, alors $F^\perp$ est stable par u.

II Exercices d'application

1 Exercices de niveau 1

II. 1.1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaire sur l'espace proposé. (On pourra ne montrer que la définie positivité si la bilinéarité et la symétrie sont acquises) Ces produits scalaires seront réutilisés :

II. 1.1.1 I. 3.1. $\langle X \mid Y \rangle_1 =^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ de $\mathbb{R}^2$.

II. 1.1.2 I. 3.1. $\langle f \mid g \rangle_2 = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$

II. 1.1.3 I. 3.1. I. 3.2. $\langle P \mid Q \rangle_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

II. 1.1.4 I. 3.1. $\langle P \mid Q \rangle_4 = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

II. 1.2. I. 2.11.1 Dessiner les boules unitées pour les normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.

II. 1.3. On pose $F = \{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$.

II. 1.3.1 I. 3.2.1 Montrer que $t \mapsto t - \dfrac{1}{2}$ est orthogonal aux fonctions constantes.

II. 1.3.2 I. 3.2.4 Pour $\langle . \mid . \rangle_2$, montrer que $1 \notin F^\perp$.

II. 1.3.3 I. 3.3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

II. 1.4. I. 3.5. Orthonormaliser la famille $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

II. 1.5. I. 3.2.3 Montrer que l'ensemble des fonctions paires et impaires sont orthogonales pour la produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

II. 1.6. Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, on considère $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = y, z = -t\right\}$.

II. 1.6.1 I. 3.7.1 I. 3.7.2 Déterminer la matrice du projecteur orthogonale sur F dans la base canonique.

II. 1.6.2 I. 3.8. En déduire la distance de $(1,-1,0,0)$ à F.

II. 1.7. I. 3.8. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ pour $\langle . \mid . \rangle_4$.

II. 1.8. I. 3.14. Soit $f : E \to E$ une application (pas forcément linéaire) qui préserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. Calculer $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x, y \in E$. Que peut-on en déduire ?

II. 1.9. I. 3.6.2 Montrer que l'application $(x, y, z) \mapsto \dfrac{x+y}{2}(1,1,0) + \dfrac{-x+y+z}{3}(-1,1,1)$ est un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ canonique. Le caractériser.

II. 1.10. I. 1.20. Justifier que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et donner sa réduction dans une base orthonormale.

II. 1.11. I. 3.18. Caractériser l'endomorphisme canoniquement associé à $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

II. 1.12. I. 3.2.3 Soit $u \in O(E)$ et $v = u - Id_E$. Montrer que $\ker(v) = (Im(v))^{\perp}$

II. 1.13. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique :

II. 1.13.1 I. 3.4.2 Montrer que la base canonique est une base orthonormale.

II. 1.13.2 I. 3.2.3 Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

II. 1.13.3 I. 3.13. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{Tr({}^tAA)}$ et préciser les cas d'égalité.

II. 1.13.4 I. 3.6.1 Montrer que l'application $M \mapsto \dfrac{1}{2}(M +^t M)$ est un projecteur orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

II. 1.14. On considère l'application $N : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) \mapsto n \max\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} (|a_{ij}|) \end{array} \right.$.

II. 1.14.1 I. 3.15. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

II. 1.14.2 Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

II. 1.15. I. 3.15. Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace E. Montrer que l'application $x \mapsto \max(N_1(x), N_2(x))$ est une norme sur E.

2 Exercices de niveau 2

II. 2.1. I. 3.1. I. 3.1. Montrer que $\langle f \mid g \rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire de $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

II. 2.2. On considère $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(k)Q(k)$ l'application de $\mathbb{R}[X]^2$

II. 2.2.1 I. 3.1. I. 3.1. Montrer que $\langle P \mid Q \rangle$ définie un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

II. 2.2.2 I. 1.21. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A \mid P \rangle$?

II. 2.3. On pose $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

II. 2.3.1 I. 3.1. I. 3.1. Montrer que $\langle . \mid . \rangle$ définie un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

II. 2.3.2 I. 3.4.2 Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n!}(X-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

II. 2.3.3 I. 3.3. I. 3.4.1 Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

II. 2.4. I. 3.15. Montrer que $\|(x,y)\| = \displaystyle\int_0^1 |x+ty|\,\mathrm{d}t$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

II. 2.5. I. 3.2.2 On rappelle de que $n$ème polynôme de Tchebychev est défini par la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. Est-ce une famille orthonormale ?

II. 2.6. I. 1.8. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien, et $\mathscr{B}$ une BON de E. Exprimer la trace de u grâce aux vecteurs de $\mathscr{B}$.

II. 2.7. I. 3.10.2I. 3.9.4 Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

II. 2.8. I. 1.8. Donner une expression de l'unique produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ pour lequel la famille $((1,2),(2,1))$ est orthonormale ?

II. 2.9. I. 3.7.1 Soit H un hyperplan de E euclidien, et a un vecteur normal à H. Déterminer une expression simple du projecteur orthogonal de E sur H, puis de la symétrie orthogonale par rapport à H.

II. 2.10. I. 3.8. Calculer la valeur de $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\displaystyle\int_0^1 \left(t-a\sqrt{t}-b\right)^2\mathrm{d}t\right)$.

II. 2.11. I. 3.16.4 Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = I_n$. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à M est une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

II. 2.12. I. 3.18. I. 3.16.4 I. 3.17.3 I. 3.6.3 Caractériser les endomorphismes canoniquement associés à $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -3 & 6\\ 6 & 2 & 3\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$ et à $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1 & -2\\ 1 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

II. 2.13. Pour $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$, et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0)=0\}$ et $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de GS de la base canonique pour ce produit scalaire.

II. 2.13.1 I. 3.1. Justifier que $\langle . \mid . \rangle$ définit bien un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

II. 2.13.2 I. 3.4.1 Justifier que $\mathscr{B}_n = (P_0,\dots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II. 2.13.3 I. 1.19. Justifier que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k' \perp P_k$.

II. 2.13.4 I. 2.3.2 Grâce à une IPP, en déduire la valeur de $P_k(0)^2$.

II. 2.13.5 I. 3.20.3 Quelle est la dimension de F ?

II. 2.13.6 I. 1.8. Déterminer une base de $F^{\perp}$ que l'on exprimera dans la base $\mathscr{B}_n$.

II. 2.13.7 I. 3.8. En déduire la distance de 1 à $F^{\perp}$, puis celle de 1 à F.

II. 2.14. Pour $\alpha \neq -1$, on pose $f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x \mid a\rangle a$, où a est un vecteur unitaire.

II. 2.14.1 I. 3.19.1 Montrer que f_α est un endomorphisme symétrique.

II. 2.14.2 I. 1.20. En déduire qu'il est diagonalisable, et le réduire.

II. 2.14.3 Montrer que f_α est un automorphisme de E pour tout $\alpha \neq -1$ et donner son inverse.

II. 2.14.4 I. 3.6.2 Si $\alpha = -1$, caractériser cet endomorphisme.

II. 2.15. I. 3.13. Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $(Tr(AB+BA))^2 \leq 4Tr(A^2)Tr(B^2)$.

II. 2.16. On se place sur $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et on considère la partie
$$A = \left\{ f \in \mathscr{C}([0,1]) | f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geq 1 \right\}.$$

II. 2.16.1 I. 3.9.4 Montrer que A est une partie fermée.

II. 2.16.2 I. 2.11.2 Vérfier que $\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$.

II. 2.17. On note E l'ensemble des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge.

II. 2.17.1 I. 3.15. Montrer que l'application $(a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ est une norme de E.

II. 2.17.2 I. 3.9.4 Montrer que la partie $\left\{ a \in E | \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$ est fermée.

II. 2.17.3 I. 3.10.1 Montrer qu'elle n'est pas ouverte.

II. 2.17.4 I. 3.11. Cette partie est-elle bornée ?

II. 2.17.5 I. 3.12. Cette partie est-elle convexe ?

3 Exercices de niveau 3

II. 3.1. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

II. 3.1.1 Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n dedegré n et de coefficient dominant 1.

II. 3.1.2 Étudier la parité des polynômes P_n.

II. 3.1.3 Prouver que pour chaque $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II. 3.1.4 En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.