I À savoir faire

1 Propriétés et théorèmes

En **gras** : démonstration à savoir refaire

I. 1.1. **Formule du binôme de Newton** (pour les scalaires ou les matrices), formule de Leibniz (pour les applications, pour les polynômes)

I. 1.2. Formule des coefficients d'une CL ou d'un produit de matrices

I. 1.3. Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice

I. 1.4. Unicité de l'écriture polynomiale

I. 1.5. Caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme par ses dérivées successives

I. 1.6. Formule de Taylor pour les polynômes, relations coefficient-racine

I. 1.7. Théorème de d'Alembert-Gauss

I. 1.8. Décomposition en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$

I. 1.9. Formule de Grassman

I. 1.10. Théorème de la base incomplète

I. 1.11. Théorème de la base adaptée (à une décomposition en somme directe de 2 ou n sev, à un sev de dimension finie)

I. 1.12. Si F est un sev de E, $\dim(F) \leq \dim(E)$ et $(F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E))$.

I. 1.13. **Si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors $E \times F$ l'est aussi avec** $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

I. 1.14. Une application linéaire est entièrement déterminée par les images d'une base

I. 1.15. Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires

I. 1.16. **Théorème du rang**

I. 1.17. L'application $\left\{\begin{array}{l} \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{\dim(E),\dim(F)}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathcal{M}at_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array}\right.$ est un isomorphisme

I. 1.18. Matrice de l'image d'un vecteur, matrice d'une composée d'applications, matrice de l'inverse d'un isomorphisme

I. 1.19. Formule du changement de base

I. 1.20. Formule du développement par rapport à une ligne/une colonne

I. 1.21. Si F est un sev de E de dimension finie, alors F admet un supplémentaire dans E

I. 1.22. **Définition et valeur d'un déterminant de Vandermonde**

I. 1.23. **La trace, le déterminant, le spectre et le polynôme caractéristique sont stables par similitude**

I. 1.24. Les sommes d'espaces propres distincts sont directes

I. 1.25. Caractérisations de la diagonalisabilité

I. 1.26. Caractérisations de la trigonalisabilité

I. 1.27. Inégalités liant multiplicité d'une valeur propre et dimension de son espace propre ; et liant le cardinal du spectre, la somme des dimensions des espaces propres, et dimension de l'espace

I. 1.28. Degré et 3 coefficients du polynôme caractéristique

I. 1.29. Théorème de Cayley-Hamilton

I. 1.30. **Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique**

I. 1.31. Théorème spectral

2 Définitions

I. 2.1. Matrice :

- I. 2.1.1 carrée
- I. 2.1.2 triangulaire
- I. 2.1.3 diagonale
- I. 2.1.4 échelonnée
- I. 2.1.5 échelonnée réduite
- I. 2.1.6 inversible
- I. 2.1.7 transposée
- I. 2.1.8 symétrique, antisymétrique
- I. 2.1.9 rang
- I. 2.1.10 d'une application linéaire dans des bases
- I. 2.1.11 d'un vecteur dans une base
- I. 2.1.12 semblables
- I. 2.1.13 équivalentes
- I. 2.1.14 déterminant
- I. 2.1.15 par blocs
- I. 2.1.16 trace
- I. 2.1.17 vecteurs propres
- I. 2.1.18 valeurs propres
- I. 2.1.19 espaces propres
- I. 2.1.20 spectre
- I. 2.1.21 diagonalisable

I. 2.1.22 trigonalisable

I. 2.2. Polynôme :

- I. 2.2.1 degré
- I. 2.2.2 coefficient dominant
- I. 2.2.3 coefficient constant
- I. 2.2.4 terme de plus haut degré
- I. 2.2.5 dérivée
- I. 2.2.6 racine
- I. 2.2.7 multiplicité d'une racine
- I. 2.2.8 $\mathbb{K}_n [X]$
- I. 2.2.9 $\mathbb{K} [X]$
- I. 2.2.10 scindé
- I. 2.2.11 scindé à racines simples
- I. 2.2.12 irréductible
- I. 2.2.13 caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme
- I. 2.2.14 annulateur d'une matrice, d'un endomorphisme

I. 2.3. Espace vectoriel :

- I. 2.3.1 Sous-espace vectoriel
- I. 2.3.2 engendré par une famille
- I. 2.3.3 somme
- I. 2.3.4 somme directe
- I. 2.3.5 supplémentaires
- I. 2.3.6 isomorphes
- I. 2.3.7 caractéristiques d'un endomorphisme
  - I. 2.1. d'un projecteur
  - I. 2.2. d'une symétrie
- I. 2.3.8 stable
  - I. 2.1. par une opération
  - I. 2.2. par une application
- I. 2.3.9 hyperplan

I. 2.4. Famille de vecteurs :

- I. 2.4.1 libre
- I. 2.4.2 liée
- I. 2.4.3 génératrice
- I. 2.4.4 base
- I. 2.4.5 bases canoniques

I. 2.4.6 coordonnées dans une base

I. 2.4.7 rang

I. 2.5. Application linéaire :

I. 2.5.1 injective

I. 2.5.2 surjective

I. 2.5.3 bijective

I. 2.5.4 isomorphisme

I. 2.5.5 endomorphisme

I. 2.5.6 endomorphisme induit sur un sev stable

I. 2.5.7 automorphisme

I. 2.5.8 rang

I. 2.5.9 image

I. 2.5.10 noyau

I. 2.5.11 restreinte

I. 2.5.12 co-restreinte

I. 2.5.13 homothétie

I. 2.5.14 projecteur

I. 2.5.15 symétrie

I. 2.5.16 canoniquement associée à une matrice

I. 2.5.17 déterminant d'un endomorphisme

I. 2.5.18 vecteurs propres

I. 2.5.19 valeurs propres

I. 2.5.20 espaces propres

I. 2.5.21 spectre

I. 2.5.22 diagonalisable

I. 2.5.23 trigonalisable

I. 2.5.24 forme linéaire

I. 2.6. Dimension à connaître :

I. 2.6.1 $\mathbb{K}^n$

I. 2.6.2 $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

I. 2.6.3 $\mathbb{K}_n\left[X\right]$

I. 2.6.4 $\mathscr{L}(E,F)$

I. 2.6.5 $\mathcal{F}(E,F)$

I. 2.6.6 $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$

I. 2.6.7 $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$

3 Méthodes

I. 3.1. Multiplier deux matrices

I. 3.2. Calculer les puissances d'une matrice :

- I. 3.2.1 trouver une formule + récurrence
- I. 3.2.2 par la formule du binôme de Newton
- I. 3.2.3 par une division euclidienne d'un polynôme annulateur
- I. 3.2.4 par sa réduction
- I. 3.2.5 Applications : donner le terme général d'une suite récurrente linéaire

I. 3.3. Résoudre un système linéaire, avec ou sans second membre.

I. 3.4. Trouver le rang d'une matrice par l'algorithme du pivot de Gauss

I. 3.5. Montrer qu'une matrice est inversible

- I. 3.5.1 par son rang
- I. 3.5.2 par son déterminant
- I. 3.5.3 par son spectre

I. 3.6. Trouver l'inverse d'une matrice

- I. 3.6.1 par l'algorithme du pivot
- I. 3.6.2 par un polynôme annulateur

I. 3.7. Calculer un déterminant

- I. 3.7.1 d'une matrice de taille 2, ou 3
- I. 3.7.2 par des opérations élémentaires
- I. 3.7.3 par la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne
- I. 3.7.4 par récurrence
- I. 3.7.5 d'une matrice triangulaire (par blocs)

I. 3.8. Résoudre une équation polynomiale

I. 3.9. Connaître le degré d'un polynôme issue d'une opération sur deux polynômes

I. 3.10. Connaître des coefficients particuliers d'un polynôme issue d'une opération sur des polynômes

I. 3.11. Faire une division euclidienne entre deux polynômes

I. 3.12. Résoudre un système non linéaire par la relation coefficients-racines

I. 3.13. Utiliser le symbole de Kronecker pour simplifier les calculs

I. 3.14. Montrer qu'un ensemble est un espace-vectoriel :

- I. 3.14.1 en tant que sev
- I. 3.14.2 en tant qu'espace engendré

I. 3.14.3 en tant que noyau d'une application linéaire

I. 3.14.4 en tant qu'image directe ou réciproque d'un sev par une application linéaire

I. 3.15. Montrer qu'une somme de sev est directe

I. 3.15.1 de deux sev

I. 3.15.2 de n sev

I. 3.16. Montrer que deux sev sont supplémentaires

I. 3.17. Montrer que de n sev sont supplémentaires

I. 3.18. Montrer qu'une famille de vecteurs est libre

I. 3.18.1 par la méthode suivant la définition

I. 3.18.2 car échelonnées en degré pour une famille de polynômes

I. 3.18.3 comme image d'une famille libre par une application linéaire injective

I. 3.19. Trouver une partie génératrice d'un espace vectoriel

I. 3.20. Montrer qu'une famille de vecteurs est une base

I. 3.20.1 par liberté + dimension

I. 3.20.2 comme image d'une base par un isomorphisme

I. 3.20.3 par son rang

I. 3.21. Donner les coordonnées d'un vecteur dans une base

I. 3.22. Montrer qu'une application est linéaire

I. 3.23. Montrer qu'une application linéaire est injective

I. 3.23.1 par le noyau

I. 3.23.2 car surjective entre deux espaces isomorphes

I. 3.23.3 par son rang

I. 3.24. Montrer qu'une application linéaire est surjective

I. 3.24.1 avec la dimension de l'image

I. 3.24.2 en tant que forme linéaire non nulle

I. 3.24.3 car injective entre deux espaces isomorphes

I. 3.25. Montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme

I. 3.25.1 par la définition

I. 3.25.2 en donnant l'image

I. 3.26. Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

I. 3.26.1 car injective (ou surjective) entre deux espaces isomorphes

I. 3.26.2 par sa matrice

- I. 3.26.3 par son spectre

I. 3.27. Trouver une base de l'image d'une application linéaire

- I. 3.27.1 par une famille génératrice
- I. 3.27.2 par l'écriture matricielle

I. 3.28. Trouver le noyau d'une application linéaire

- I. 3.28.1 par la définition
- I. 3.28.2 par l'écriture matricielle

I. 3.29. Montrer qu'une application linéaire est un projecteur

- I. 3.29.1 par sa composée
- I. 3.29.2 par sa matrice
- I. 3.29.3 par définition

I. 3.30. Montrer qu'une application linéaire est une symétrie

- I. 3.30.1 par sa composée
- I. 3.30.2 par sa matrice
- I. 3.30.3 par définition

I. 3.31. Donner la matrice d'un(e famille de) vecteur(s) dans une base

I. 3.32. Donner la matrice d'une application linéaire dans des bases

- I. 3.32.1 par la définition
- I. 3.32.2 par la formule du changement de base
- I. 3.32.3 en utilisant une base adaptée aux espaces caractéristiques de l'application

I. 3.33. Calculer le déterminant d'un endomorphisme

I. 3.34. Réduire une matrice

I. 3.35. Application : donner les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

I. 3.36. Montrer qu'une matrice est semblable à une matrice triangulaire.

4 Propriétés à s'entraîner à montrer pour valider les acquis

I. 4.1. I. 1.2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaire supérieure (resp. inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

I. 4.2. I. 1.2. Si C est une matrice colonne et A une matrice rectangle, telles que le produit AC ait du sens, montrer que AC est une CL des colonnes de A.

I. 4.3. I. 1.2. I. 2.1.7 Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$

I. 4.4. I. 2.1.7I. 2.1.8 Montrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I. 4.5. I. 2.1.8 Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétriques sont nuls.

I. 4.6. I. 3.9. Montrer que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

I. 4.7. I. 3.9. Montrer que $\deg(P') = -\infty$ ou $\deg(P) - 1$

I. 4.8. I. 3.9. I. 3.14.1 Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$

I. 4.9. I. 3.14.1 Montrer qu'une somme et qu'une intersection de sous-espaces vectoriels sont des sous-espace vectoriels.

I. 4.10. I. 3.16. Montrer que $F + G = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$

I. 4.11. I. 3.18.2 I. 3.9. Montrer qu'une famille de polynômes échelonnée en degré est libre.

I. 4.12. I. 3.18.3 Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

I. 4.13. Montrer que l'image d'une famille génératrice de l'espace de départ par une application linéaire surjective est une famille génératrice de l'espace d'arrivée.

I. 4.14. I. 3.20.2 Montrer que l'image d'une base par un isomorphisme est une base.

I. 4.15. I. 1.13. Montrer qu'un $\mathbb{C}$-ev de dimension n est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $2n$.

I. 4.16. I. 3.14.1 Montrer que l'image directe d'un sev par une application linéaire est un sev

I. 4.17. I. 3.14.1 Montrer que l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev

I. 4.18. I. 2.5.11 I. 3.28.1 Montrer que $\ker(f_{|A}) = A \cap \ker(f)$

I. 4.19. I. 3.28.1 Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$

I. 4.20. I. 2.5.9 Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

I. 4.21. I. 2.5.9 I. 3.28.1 Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset \ker(g)$

I. 4.22. I. 2.5.9 I. 3.28.1 I. 2.5.20 Montrer que $f \circ g = g \circ f \Rightarrow \ker(g)$, $\mathrm{Im}(g)$, et $E_\lambda(g)$ stables par f.

I. 4.23. I. 2.5.21 I. 1.7. I. 1.29. I. 2.2.13 $1 \leq Card(\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(u)) \leq n$, et si n impair, $1 \leq Card(\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(u))$

I. 4.24. I. 1.29. I. 2.1.10 I. 2.2.13 Si F stable par u, $\chi_{u_F} | \chi_u$

I. 4.25. I. 3.30.1 Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de E. Montrer que $s = 2p - Id_E$ est une symétrie de E.

II Exercices d'application

1 Exercices de niveau 1

II. 1.1. I. 3.6.1 Montrer que $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et donner son inverse par la méthode du pivot.

II. 1.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II. 1.2.1 I. 3.1.Calculer $A^2 - 2A$.

II. 1.2.2 I. 3.6.2 En déduire que A est inversible et donner son inverse.

II. 1.2.3 I. 3.2.3 En déduire les puissances de A.

II. 1.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II. 1.3.1 I. 3.7.5 I. 3.5.2 Donner le déterminant de A. Est-elle inversible ?

II. 1.3.2 I. 3.2.2 Calculer les puissances de A à l'aide de la formule du binôme.

II. 1.4. I. 3.3. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 6y + z = 2 \\ 3x - 3y + z = 3 \end{cases}$

II. 1.5. I. 3.14.1 Montrer que l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel

II. 1.6. I. 3.14.3 Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_3 [X] , P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel.

II. 1.7. I. 3.14.1I. 3.14.2 I. 3.19. Montrer que $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z - t = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

II. 1.8. Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0, y - z + t = 0\right\}$ et $G = Vect((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$

II. 1.8.1 I. 3.14.1I. 3.14.2 I. 3.14.3 Montrer par 3 méthodes que F est un espace vectoriel.

II. 1.8.2 I. 3.15.1 Montrer que F et G sont en somme directe.

II. 1.8.3 I. 3.16. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

II. 1.9. I. 3.18.1 Montrer que $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$ est libre.

II. 1.10.

II. 1.10.1 I. 3.18.2 Montrer que $(2X + 5, -3, 1 - X + X^2)$ est libre.

II. 1.10.2 I. 3.20.1 Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2 [X]$

II. 1.10.3 I. 3.21. Donner les coordonnées de $X^2 + 1$ dans cette base

II. 1.11.

II. 1.11.1 I. 3.22. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}([0, 1] , \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$ est linéaire.

II. 1.11.2 I. 3.24.2 Montrer qu'elle est surjective.

II. 1.12.

II. 1.12.1 I. 3.22. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$ est linéaire.

II. 1.12.2 I. 3.24.1 Monter qu'elle est surjective.

II. 1.12.3 I. 3.28.1 Donner une base du noyau de φ.

II. 1.13. I. 3.15.2 Montrer que la somme $\mathbb{R}_0[X] + \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\} + Vect(X^3)$ est directe.

II. 1.14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

II. 1.14.1 I. 3.4. Donner le rang de A.

II. 1.14.2 I. 3.5.1 La matrice A est-elle inversible ?

II. 1.14.3 I. 3.34. Montrer que A est diagonalisable et réduire la matrice.

II. 1.14.4 I. 1.23. I. 3.7.5 En déduire la valeur du déterminant de A.

II. 1.14.5 I. 3.2.4 Déduire de sa réduction les puissances de A.

II. 1.14.6 I. 3.2.5 Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n - 7w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - 4w_n \end{cases}$, exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de u_0.

II. 1.15. Soit $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 0, 1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

II. 1.15.1 I. 3.31. Donner la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

II. 1.15.2 I. 3.4. Donner le rang de $\mathcal{F}$.

II. 1.15.3 I. 3.20.3 La famille $\mathcal{F}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$

II. 1.16. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto (P(0), P') \end{cases}$

II. 1.16.1 I. 3.22. Montrer que φ est linéaire.

II. 1.16.2 I. 3.20.1 Montrer que $\mathscr{B} = ((1, 0), (0, 1), (0, X), (0, X^2))$ est une base de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X]$

II. 1.16.3 I. 3.32.1 Donner la matrice de φ de $\mathscr{B}_{can}$ dans $\mathscr{B}$.

II. 1.16.4 I. 3.4. En déduire le rang de φ.

II. 1.16.5 I. 3.23.3 φ est-elle injective ?

II. 1.16.6 I. 3.24.1 φ est-elle surjective ?

II. 1.17. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dans les bases canoniques.

II. 1.17.1 I. 3.27.2 Donner une base de l'image de φ.

II. 1.17.2 I. 3.28.2 Donner une base du noyaux de φ

II. 1.17.3 I. 2.1.17 Montrer que $1 + X + X^2$ est un vecteur propre de φ ; et donner sa valeur propre associée.

II. 1.18. I. 3.25.1 Soit $\varphi : P \mapsto XP'$. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II. 1.19. Soit $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, 3x - 6y + 9z, 2x - 4y + 6z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

II. 1.19.1 I. 3.32.1 Donner la matrice de φ dans les bases canoniques.

II. 1.19.2 I. 3.29.2 Montrer que φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

II. 1.19.3 I. 2.1. Donner ses espaces caractéristiques.

II. 1.19.4 I. 1.11. Donner une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe.

II. 1.19.5 I. 3.32.2 I. 3.32.3 Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ et la matrice de passage.

II. 1.20.

II. 1.20.1 I. 3.16. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus Vect(X^2 + X + 1)$.

II. 1.20.2 I. 3.21. I. 3.30.3 Déterminer une expression de la symétrie par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $Vect(X^2 + X + 1)$.

II. 1.21. I. 3.30.2 Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^4$ et la caractériser.

2 Exercices de niveau 2

II. 2.1. I. 3.14.2 Montrer que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(x)\}$ est un espace vectoriel.

II. 2.2. Pour quels types d'objets $x \in ?$ et $y \in ?$ a-t-on l'implication $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$?

II. 2.3. I. 3.11. Faire la division euclidienne de $X^5 + 2X^3 - X^2 - 4X + 3$ par $X^2 + 3X + 1$

II. 2.4. I. 3.12. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -2 \end{cases}$

II. 2.5. Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X]\,; P(X^2) = X^2 P\right\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,, P(1) = P(2)\}$

II. 2.5.1 I. 3.8.I. 3.19. Donner une famille génératrice de F.

II. 2.5.2 I. 3.15.1 Montrer que F et G sont en somme directe.

II. 2.5.3 I. 3.16. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

II. 2.6. I. 3.18.1 Montrer que $(\sin, \cos, x \mapsto \sin(2x))$ est libre.

II. 2.7.

II. 2.7.1 I. 3.22. I. 3.23.1 Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 0) \end{cases}$ est une application linéaire injective.

II. 2.7.2 I. 3.18.3 En déduire que la famille $((1, 1, 0), (1, -1, 0))$ est libre.

II. 2.7.3 I. 3.20.1 Est-ce une base d'un espace vectoriel ?

II. 2.8. I. 3.19. I. 3.8. Donner une famille génératrice de $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)\right\}$

II. 2.9. I. 3.10. I. 3.9. On pose $P_0 = 2, P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

II. 2.10. I. 3.17. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, celui des matrices triangulaires inférieures strictes, et celui des matrices diagonales sont supplémentaires dans l'ensemble des matrices carrées.

II. 2.11.

II. 2.11.1 I. 3.36. Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

II. 2.11.2 I. 1.23. En déduire le spectre de A.

II. 2.11.3 I. 3.5.3 La matrice A est-elle inversible ?

II. 2.12. Donner la forme des solutions de l'équation différentielle $(E) : y^{(3)} - 2y'' + y' + y = 0$.

II. 2.13. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note pour tout $n \geq 2$, $d_n = \det(A_n)$ et $d_1 = 3$

II. 2.13.1 I. 3.7.1 I. 3.5.2 Calculer d_2. A_2 est-elle inversible ?

II. 2.13.2 I. 3.7.3 Faire un développement par rapport à la première colonne pour exprimer d_n en fonction de d_{n-1}.

II. 2.13.3 I. 3.7.4 Déduire de l'égalité précédente la relation $\forall n \geq 1$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} - 2d_n$ puis la valeur de d_n pour tout $n \geq 2$.

II. 2.14. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P(0) \end{array} \right.$

II. 2.14.1 I. 3.22. Montrer que φ est linéaire.

II. 2.14.2 I. 3.14.4 Montrer que $\{P' - P(0), P \in \mathbb{R}_1[X]\}$ est un espace-vectoriel.

II. 2.14.3 I. 3.27.1 En donner une base.

II. 2.14.4 I. 3.8. Montrer que si P n'est pas un polynôme constant, alors P ne peut pas être vecteur propre de φ associé à une valeur propre non nulle. En déduire le spectre de φ

II. 2.14.5 I. 3.26.3 En déduire que φ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

II. 2.15. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, et $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto PM \end{array} \right.$.

II. 2.15.1 I. 3.22. Montrer que φ_n est linéaire.

II. 2.15.2 Montrer que $\varphi_n(GL_n(\mathbb{K})) = GL_n(\mathbb{K})$.

II. 2.15.3 I. 3.25.2 En déduire que φ_n induit un endomorphisme $\varphi_{G,n}$ de $GL_n(\mathbb{K})$.

II. 2.15.4 I. 3.23.1 Montrer que $\varphi_{G,n}$ est injective.

II. 2.15.5 I. 3.26.1 En déduire que $\varphi_{G,n}$ est un automorphisme de $GL_n(\mathbb{K})$.

II. 2.15.6 I. 3.32.1 Dans le cas particulier $n = 2$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donner la matrice M_2 de φ_2 dans les bases canoniques.

II. 2.15.7 I. 3.7.2 Calculer $\det(M_2)$.

II. 2.15.8 I. 3.26.2 En déduire que φ_2 est un isomorphisme.

II. 2.15.9 I. 3.33. Que vaut $\det(\varphi_2^{-1})$?

II. 2.16. Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient $f_1 + \cdots + f_n = Id_E$ et $\forall i, j \in [\![1, n]\!]\,,\ i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

II. 2.16.1 I. 3.29.1 Montrer que les f_i sont des projecteurs de E.

II. 2.16.2 I. 3.17. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i)$.

II. 2.17.

II. 2.17.1 I. 3.16. Montrer la décomposition $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

II. 2.17.2 I. 2.3.5 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $M = \dfrac{M +^t M}{2} + \dfrac{M -^t M}{2}$, $\dfrac{M +^t M}{2} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{M -^t M}{2} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, puis que cette écriture est unique.

II. 2.17.3 I. 3.29.3 Montrer que l'application $\varphi_1 : M \mapsto \dfrac{M -^t M}{2}$ est un projecteur et le caractériser.

II. 2.17.4 I. 3.32.3 Donner la matrice de φ_1 dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition en supplémentaires $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

II. 2.17.5 I. 3.30.3 Montrer que l'application $\varphi_2 : M \mapsto \dfrac{M -^t M}{2} - \dfrac{M +^t M}{2}$ est une symétrie et la caractériser.

II. 2.17.6 I. 3.32.3 Donner la matrice de φ_2 dans la base $\mathscr{B}$.