DS n°1

Le 17 septembre 2021

Durée : 3h.

Tout matériel électronique est interdit.

On apportera un soin tout particulier à la qualité du fond (rigueur, précision et concision) et de la forme (phrases entières, orthographe, écriture lisible, pas de rature, etc.). Les résultats de chaque question traitée doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.
Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

Ce sujet comprend des questions et deux problèmes qui sont indépendants.

Questions diverses

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Par un changement de variable $u = \sqrt{t}$ en déduire la valeur de l'intégrale.

Solution :
$t \mapsto te^{-\sqrt{t}} \in \mathscr{C}^0([0, +\infty[$ et
$t^2 te^{-\sqrt{t}} = t^3 e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, ainsi
$te^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
Ainsi la fonction $t \mapsto te^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in [0, +\infty[$, on pose $I_x = \displaystyle\int_0^x te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
Par le changement de variable suggéré :
- $u = \sqrt{t}$
- $2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$
- $t : 0 \to x$
  $u : 0 \to \sqrt{x}$

$I_x = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} u^3 e^{-u}\mathrm{d}u$
Puis on réalise 3 intégrations par parties successives en dérivant le polynôme :

$$\begin{aligned}
I_x &= 2\left[-u^3e^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}} + 6\int_0^{\sqrt{x}} u^2e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= -2\sqrt{x}^3e^{-\sqrt{x}} + 6\left[-u^2e^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}} + 12\int_0^{\sqrt{x}} ue^{-u}\mathrm{d}u \\
&= -2\sqrt{x}^3e^{-\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}^2e^{-\sqrt{x}} + 12\left[-ue^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}} + 12\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\mathrm{d}u \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 12 \text{ par croissance comparée}
\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = 12$

2. On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X], \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$

Justifier que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Solution :
Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(Q,P)$
Donc φ est symétrique.
$\varphi(\lambda P + Q, R) = \displaystyle\int_0^1 (\lambda P + Q)(t)R(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)R(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)R(t)\ \mathrm{d}t = \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
donc φ est linéaire à gauche, et elle est aussi linéaire à droite par symétrie, donc elle est bilinéaire.
$\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
Si $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P^2(t) = 0$ alors $\forall t \in [0,1], P^2(t) = 0$ car $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$; et alors P admet une infinité de racine, donc est le polynôme nul : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Donc φ est définie positive.
En conclusion, φ est une forme bilinéaire symétrique définie-poisitve sur $\mathbb{R}[X]$, donc c'est bien un produit scalaire.

3. Montrer que l'application $u : P \mapsto XP'(2X+1)$ définit un endomorphisme de $R_2[X]$ puis donner sa matrice dans la base canonique.

Solution :
Soit $P \in R_2[X]$,
$\deg(u(P)) = \deg(XP'(2X+1)) = \deg(X) + \deg(P'(2X+1)) = 1 + \deg(P(2X+1)) - 1 = \deg(P) \times \deg(2X+1) = \deg(P) \leq 2$
Donc $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$
et u est linéaire :
Si $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$u(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)'(2X+1) = \lambda XP'(2X+1) + XQ'(2X+1) = \lambda u(P) + u(Q)$
Ainsi u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
Comme $u(1) = 0$; $u(X) = X$ et $u(X^2) = 4X^2 + 2X$
$\mathcal{M}at_{\mathscr{B}_{can}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$, justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors
$|f_n(x)| = \dfrac{1}{1+nx}$ est le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge,
c'est-à-dire $\sum f_n$ converge simplement vers sa somme sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = (\sin(x))^n \cos(x)$. Sur quel intervalle et vers quelle fonction la suite de fonctions (f_n) converge simplement ?

Solution :
cf DM1

Problème 1

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3,...
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.
À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.
À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarque que X_n peut prendre les valeurs $0, 1$ et 2, c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.
   Déterminer la variance de X_0.

Solution :
À l'instant initial, les deux ampoules sont allumées, donc X_0 est une variable aléatoire constante égale à 2.
Alors $X_0(\Omega) = \{2\}$ et $P(X_0 = 2) = 1$, et

$$E(X_0) = 2 \times 1 = 2.$$

Comme X_0 est constante, alors $V(X_0) = 0$

(ou par le théorème de Koening-Huygens
$V(X_0) = E(X_0^2) - (E(X_0))^2 = 2^2 \times 1 - 2^2 = 0$ en utilisant la formule de transfert pour calculer $E(X_0^2)$).

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

Solution : Soit n un entier naturel
On sait que $X_n = 2$, donc au temps n les deux ampoules sont allumées.
Sachant cela, $(X_{n+1} = 2)$ si et seulement les deux ampoules restent allumées ; or la probabilité qu'une ampoule reste allumée est $\frac{1}{2}$, et les deux ampoules sont indépendantes l'une de l'autre, donc

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Toujours en sachant $X_n = 2$, l'événement $(X_{n+1} = 1)$ correspond à une ampoule grillée et l'autre allumée.
Comme les ampoules sont indépendantes, l'événement "la première ampoule reste allumée et la seconde est grillée" a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; de même l'événement "la première ampoule est grillée et la seconde reste allumée" a pour probabilité $\frac{1}{4}$.
Ces deux événements étant incompatibles, on a

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur sans justification des probabilités conditionnelles suivante :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$
$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

Solution : Par un raisonnement similaire :
$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,
$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$,
$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$.

4. Soit $n \geq 0$, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$.

Solution : $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) \cdot P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \cdot P(X_n = 1) \\ &\quad + P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \cdot P(X_n = 2) \\ &= 0 + \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2) \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$P(X_{n+1}=0)=1\cdot P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{4}P(X_n=2)$$

et

$$P(X_{n+1}=2)=0\cdot P(X_n=0)+0\cdot P(X_n=1)+\frac{1}{4}P(X_n=2)=\frac{1}{4}P(X_n=2)$$

5. Montrer alors que $U_{n+1}=AU_n$ où $A=\begin{pmatrix}1&1/2&1/4\\0&1/2&1/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}$. Montrer alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=A^nU_0$.

Solution :
On peut alors écrire

$$\begin{aligned}A\times U_n&=\begin{pmatrix}1&1/2&1/4\\0&1/2&1/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{4}P(X_n=2)\\\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\\\frac{1}{4}P(X_n=2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\\P(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}=U_{n+1}\end{aligned}$$

Espérance et variance des X_n
On se propose de déterminer l'espérance et la variance des X_n sans chercher leur loi.
On introduit les matrices de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

$$L_1=\begin{pmatrix}0&1&2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad L_2=\begin{pmatrix}0&1&4\end{pmatrix}.$$

6. Calcul de l'espérance :
   (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, vérifier que $E(X_n)=L_1U_n$.

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}$,
Comme $X_n(\Omega)=\{0,1,2\}$,

$$\begin{aligned}E(X_n)&=0\times P(X_n=0)+1\times P(X_n=1)+2\times P(X_n=2)\\&=\begin{pmatrix}0&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}=L1\times U_n\text{ En identifiant la matrice 1x1 avec le réel}\end{aligned}$$

   (b) Calculer L_1A et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
   En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $E(X_{n+1})=\frac{1}{2}E(X_n)$.

Solution : En calculant, on trouve $L_1\times A=\frac{1}{2}L_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= L_1 \times U_{n+1} \\ &= L_1 A U_n \\ &= \frac{1}{2} L_1 U_n \\ &= \frac{1}{2} E(X_n) \end{aligned}$$

(c) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.

Solution : La suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ainsi,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n E(X_0) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7. Calcul du moment d'ordre 2 :

(a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,
Par la formule de transfert,
$E(X_n^2) = \sum_{i=0}^{2} i^2 P(X_n = i) = P(X_n = 1) + 4P(X_n = 2) = L_2 \times U_n$ (par un raisonnement similaire à celui de la question 5a)

(b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

Solution : D'une part, $L_2 A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$,
d'autre part $\alpha L_1 + \beta L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta & 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}$.
Donc $\alpha L_1 + \beta L_2 = L_2 A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ 2\alpha + 4\beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4} E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}^2) &= L_2U_{n+1} = L_2AU_n \\
&= (\frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2)U_n \\
&= \frac{1}{4}L_1U_n + \frac{1}{4}L_2U_n \\
&= \frac{1}{4}E(X_n) + \frac{1}{4}E(X_n^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}E(X_n^2) \\
&= \frac{1}{4}E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

(d) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,
$\dfrac{1}{4}u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = u_{n+1}$

(e) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = E(X_n^2) - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = E(X_{n+1}^2 - u_{n+1} = \left[\dfrac{1}{4}E(X_n^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \left[\dfrac{1}{4}u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \dfrac{1}{4}\left[E(X_n^2) - u_n\right] = \dfrac{1}{4}v_n.$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

(f) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = v_0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ avec $v_0 = E(X_0^2) - u_0 = 4 - \dfrac{1}{2^{-1}} = 4 - 2 = 2.$
Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ \ E(X_n^2) = v_n + u_n = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

8. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n.

Solution :
Soit $n \in \mathbb{N}$,
d 'après la formule de Koening-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n^2) - (E(X_n))^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Problème 2

NB : le problème suivant comporte quatre parties relativement indépendantes les unes des autres. Plus précisément :

- *la partie II est indépendante de la partie I ;*
- *la partie III n'utilise que le résultat (donné dans la question) de la question 10 ;*
- *la partie IV utilise les résultats de la partie III.*

On pose la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

Partie I : étude de f

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ est convergente.
2. Justifier que le domaine de définition de f est $\mathcal{D} =]-1, 1[$, et montrer qu'il s'agit d'une fonction impaire.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, et en déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.
4. En déduire la position relative du graphe de f et de sa tangente en 0 au voisinage de 0. On fera notamment un schéma.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a $\dfrac{1}{1-t^2} \geq \dfrac{1}{2(1-t)}$. En déduire que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
6. Dresser le tableau de variation complet de f, et donner l'allure de son graphe.
7. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{\alpha}{1-t} + \dfrac{\beta}{1+t}$ pour deux constantes α et β que l'on déterminera.
   En déduire une expression de f.
8. Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y' + y = (1-t^2)^{3/2}$ sur $]0, 1[$.

Partie II : une famille de polynômes

9. Justifier que f est infiniment dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}$, et donner l'expression de $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$. On montrera notamment que pour $n = 1, 2, 3$, on a $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}$, où P_1, P_2 et P_3 sont trois polynômes que l'on déterminera.
   NB : à ce stade, on doit trouver $P_1 = 1$, $P_2 = 2X$ *et* $P_3 = 6X^2 + 2$.
10. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n} \qquad (E_n)$$
   et qui vérifie pour tout $n \geq 1$ la relation $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + 2nXP_n$.
11. Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n est le seul polynôme qui vérifie (E_n).
12. Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.

Partie III : recherche des racines complexes de P_n

13. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que
$$P_n = \frac{(n-1)!}{2}\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big).$$
14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence :
$$\Big(\alpha \text{ racine de } P_n\Big) \iff \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ est une racine } n\text{-ième de l'unité}\right)$$
15. En déduire que les racines complexes de P_n sont les
$$x_k = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad , \text{ où } k \in [\![1, n-1]\!] \ , \ \text{ et } \ \mathrm{cotan} = \frac{\cos}{\sin}.$$
16. En déduire la décomposition primaire de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
17. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x_k$.

Partie IV : somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Dans cette partie, on étudie plus particulièrement les polynômes $(P_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(x_k)_{1\leq k\leq 2n}$ les racines de P_{2n+1}.
    (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_{2n+1-k} = -x_k$.
    (b) A l'aide de la factorisation de P_{2n+1}, en déduire qu'il existe $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2n+1} = R_n(X^2)$ (on donnera R_n sous forme factorisée).
    NB : $R_n(X^2)$ ne désigne pas un produit, mais le polynôme composé "R_n de X^2".
19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) En utilisant la question 13, montrer que $R_n = (2n)! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

20. (a) Montrer que $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(t) \leq t \leq \tan(t)$.

(b) En déduire que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \operatorname{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(t)$.

(c) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

En appliquant l'encadrement précédent à $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, établir un encadrement de S_n.

(d) En déduire que S_n tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution :

Partie I : étude de f

1. $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2} \in \mathscr{C}^0([2, +\infty[)$ et
$\left|\dfrac{1}{1-t^2}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
Donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$

2. Si $t \in \mathbb{R}$, $1 - t^2 = 0$ ssi $t^2 = 1$, c'est-à-dire si $t = 1$ ou $t = -1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est donc continue sur les trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, et $]1, +\infty[$. Si $x \in \mathbb{R}$, elle est donc continue sur le segment $[0, x]$ à condition que $x \in]-1, 1[$. D'où $\mathcal{D} =]-1, 1[$.

D'autre part, si $x \in]-1, 1[$, on a par changement de variable $s = -t$ ($\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$) :
$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int_0^{x} \frac{-\mathrm{d}s}{1-(-s)^2} = -\int_0^{x} \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2} = -f(x)$$
Donc f est impaire.

3. En appliquant $\dfrac{1}{1-X} \underset{X\to 0}{=} 1 + X + o(X)$ à $X = x^2$, on obtient :
$$\frac{1}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$$
Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Sachant $f(0) = 0$, on peut primitiver le DL précédent pour obtenir :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

4. L'équation de la tangente au graphe de f en 0 est donc $y = x$. Or :
$$f(x) - x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{d'où :} \qquad f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$
donc en particulier, le signe de $f(x) - x$ est le même que celui de $\dfrac{x^3}{3}$ au voisinage de 0, c'est-à-dire strict. positif à droite de 0, et strict. négatif à gauche.

5. Soit $t \in]-1,1[$. On procède par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t^2} \ \geq \ \frac{1}{2(1-t)} &\iff 2(1-t) \ \geq \ 1-t^2 \qquad (1-t \text{ et } 1-t^2 \text{ sont strict. positifs}) \\ &\iff t^2-2t+1 \ \geq \ 0 \\ &\iff (t-1)^2 \ \geq \ 0 \qquad \text{ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

Par remontée des équivalences, la première inégalité est vraie.
Par croissance de l'intégrale, on a donc pour tout $x \in [0,1[$:

$$f(x) \ = \ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \ \geq \ \underbrace{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2(1-t)}}_{\hat{=}g(t)}$$

et

$$g(x) \ = \ \frac{1}{2} \times [-\ln(1-t)]_0^x \ = \ -\frac{1}{2}\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc par comparaison, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

6. Par imparité, le résultat précédent implique que $f(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

D'autre part, sur $\mathcal{D}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} > 0$, donc f est strictement croissante.

7. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{1+t} \ = \ \frac{\alpha(1+t)+\beta(1-t)}{(1-t)(1+t)} \ = \ \frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)t}{1-t^2}$$

Pour que l'égalité recherchée soit vraie, il suffit d'avoir $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

On a donc pour tout $t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}\right)$. Donc $\forall x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ \frac{1}{2}\Big([\ln(1+t)]_0^x + [-\ln(1-t)]_0^x\Big) \\ &= \ \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) \\ &= \ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

8. Commençons par résoudre l'équation homogène $(1-t^2)y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{1-t^2}y = 0$ sur $]0,1[$.

Ses solutions sont de la forme $y_H : x \mapsto \lambda e^{-f(t)}, \lambda \in \mathbb{R}$,
où f est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$,
prenons par exemple $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_H : x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \lambda\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par la méthode de la variation de la constante, cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}, \lambda \in \mathscr{C}^1(]0,1[)$.

Alors $y_0'(x) = \lambda'(x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \lambda(x) \times \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$$= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \lambda(x) \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y_0' + \frac{1}{1-x^2}y_0 &= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \lambda(x) \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\lambda(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\
&= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \lambda(x)\left(\frac{1}{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)^2}\right) \\
&= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \lambda(x)\left(\frac{1}{(1+x)(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)^2} \times \frac{\sqrt{1-}}{\sqrt{1-}}\right. \\
&= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \lambda(x)\left(\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{(1+x)^2(1-x)}\right) \\
&= \lambda'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}
\end{aligned}$$

Donc y_0 est solution particulière de l'équation avec second membre si et seulement si
$\lambda'(x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{(1-t^2)^{3/2}}{(1-t^2)} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)}$
$\Leftrightarrow \lambda'(x) = \sqrt{(1-x)(1+x)}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = 1+x$
Pour conclure, les solutions de l'équation sur $]0,1[$ sont de la forme
$y : x \mapsto \left(\lambda + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Partie II : une famille de polynômes

9. Par quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Donc f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc f aussi.

Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \boxed{\frac{1}{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1} \\
f^{(2)}(x) &= \boxed{\frac{2x}{(1-x^2)^2}} = (2x)(1-x^2)^{-2} \\
f^{(3)}(x) &= (2x) \times (-2) \cdot (1-x^2)^{-3} \cdot (-2x) + 2 \times (1-x^2)^{-2} \\
&= (8x^2 + 2(1-x^2))(1-x^2)^{-3} \\
&= \boxed{\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}}
\end{aligned}$$

Les polynômes $P_1 \hat{=} 1$, $P_2 \hat{=} 2X$ et $P_3 \hat{=} 6X^2 + 2$ conviennent donc.

10. Récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) = \left[\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tq} \quad \forall x \in]-1,1[\,,\ f^{(n)}(x) \ = \ \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n} \right]$$

— Initialisation. $\mathcal{H}(1)$ a été démontrée précédemment, avec $P_1 = 1$.

— Hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On dérive alors l'égalité $f^{(n)}(x) \ = \ \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n}$: $\forall x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(P_n(x) \times (1-x^2)^{-n} \right) \\
&= P_n'(x) \cdot (1-x^2)^{-n} \ + \ P_n(x) \cdot (-n) \cdot (1-x^2)^{-n-1} \cdot (-2x) \\
&= P_n'(x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^2)^{-n-1} \ + \ 2nxP_n(x)(1-x^2)^{-n-1} \\
&= \frac{(1-x^2)P_n'(x) + 2nxP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est donc démontrée en posant $P_{n+1} \hat{=} (1-X^2)P_n' + 2nXP_n$.

— Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie, et par construction, les P_n vérifient bien $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + 2nXP_n$.

11. Fixons $n \geq 1$ et supposons qu'un autre polynôme $\tilde{P}_n$ vérifie (E_n). On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\tilde{P}_n(x) \ = \ (1-x^2)^n \, f^{(n)}(x) \ = \ P_n(x)$$

Le polynôme $\tilde{P}_n - P_n$ admet donc une infinité de racines (tous les réels de $]-1,1[$). Il s'agit donc du polynôme nul. D'où $\tilde{P}_n = P_n$.

12. Pour tout $n \geq 1$, on note λ_n le coefficient dominant de P_n.
Récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathcal{H}(n) = [\deg(P_n) = n-1]$.

— Initialisation. $P_1 = 1$ donc son degré vaut 0, ce qui montre $\mathcal{H}(1)$.

— Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
P_n \ &= \ \lambda_n X^{n-1} + Q_n \qquad \text{pour un certain polynôme } Q_n \text{ de degré} \leq n-2 \\
\text{et donc } P_n' \ &= \ (n-1)\lambda_n X^{n-2} + Q_n'
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-X^2)P_n' \ + \ 2nXP_n \\ &= \left[-(n-1)\lambda_n X^n + 2n\lambda_n\right] X^n \ + \ (\ldots) \\ &= (n+1)\lambda_n X^n \ + \ (\ldots) \end{aligned}$$

où $(\ldots)$ désigne une somme de polynômes de degré $\leq n-1$.

On a bien démontré $\mathcal{H}(n+1)$, et au passage la relation $\boxed{\lambda_{n+1} = (n+1)\lambda_n}$.

— Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Enfin, la relation encadrée sur les λ_n, sachant de plus $\lambda_1 = 1$, montre que pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n = n!$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, P_n est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est $n!$.

Partie III : recherche des racines complexes de P_n

13. Récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) = \left[P_n \ = \ \frac{(n-1)!}{2}\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big)\right]$$

— Initialisation. $P_1 = 1$ et $\dfrac{0!}{2}((X+1)-(X-1)) = 1$ donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a donc :

$$P_n \ = \ \frac{(n-1)!}{2}\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big)$$

et comme par exemple $\big((X+1)^n\big)' = n(X+1)^{n-1}$:

$$P_n' \ = \ \frac{n!}{2}\Big((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1}\Big)$$

D'où (en utilisant que $(1-X^2) = -(X+1)(X-1)$) :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-X^2)P_n' + 2nXP_n \\ &= -\frac{n!}{2}(X+1)(X-1)\Big((X+1)^{n-1} - (X-1)^{n-1}\Big) + n!X\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big) \\ &= \frac{n!}{2}\Big[(X+1)^n(-X+1) + (X-1)^n(X+1) + 2X(X+1)^n - 2X(X-1)^n\Big] \\ &= \frac{n!}{2}\Big[(X+1)^n(2X-X+1) - (X-1)^n(2X-X-1)\Big] \\ &= \frac{n!}{2}\Big[(X+1)^{n+1} - (X-1)^{n+1}\Big] \end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

— Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

14. Remarquons tout d'abord que -1 n'est pas une racine de P_n. En effet :

$$P_n(-1) \ = \ \frac{(n-1)!}{2}\Big(0^n - (-2)^n\Big) \ \neq \ 0$$

Fixons donc $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P_n(\alpha) = 0 &\iff (\alpha+1)^n = (\alpha-1)^n \\
&\iff \frac{(\alpha-1)^n}{(\alpha+1)^n} \; = \; 1 \qquad \text{(on a bien } \alpha+1 \neq 0\text{)} \\
&\iff \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^n \; = \; 1 \\
&\iff \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ est une racine } n\text{-ième de l'unité.}
\end{aligned}$$

15. Les racines n-ièmes de l'unité sont par théorème les

$$\omega_k \; = \; e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \;\; k \in [\![0, n-1]\!] \, .$$

On peut donc poursuivre les équivalences précédentes :

$$\begin{aligned}
P_n(\alpha) = 0 &\iff \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \omega_k \qquad \text{pour un } k \in [\![0, n-1]\!] \\
&\iff \alpha - 1 = \alpha\omega_k + \omega_k \qquad \text{pour un } k \in [\![0, n-1]\!] \\
&\iff \alpha(\omega_k - 1) = -(\omega_k + 1) \qquad \text{pour un } k \in [\![0, n-1]\!]
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$, et l'égalité donne $0 = -2$, ce qui est faux. On élimine donc ce cas. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega_k \neq 1$, donc $\omega_k - 1 \neq 0$, donc on a l'équivalence :

$$P_n(\alpha) = 0 \iff \alpha = -\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} \qquad \text{pour un } k \in [\![1, n-1]\!]$$

Or, par factorisation par l'angle milieu, on a :

$$\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} \; = \; \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)} \; = \; \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \; = \; -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On a donc bien montré que les racines de P_n sont les $x_k \;\hat{=}\; i\,\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

16. Les x_k sont $n-1$ racines distinctes. En effet, la fonction cotan est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, car sa dérivée :

$$\mathrm{cotan}' \; = \; \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} \; = \; -\frac{1}{\sin^2}$$

est strictement négative. Comme P_n est de degré $n-1$, il s'agit donc de racines simples. Par ailleurs, le coefficient dominant de P_n est $n!$. La décomposition primaire de P_n est donc :

$$\boxed{P_n = n! \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)}$$

17. On évalue cette dernière égalité en 0 :

$$P_n(0) \; = \; n! \prod_{k=1}^{n-1} (-x_k) \; = \; (-1)^{n-1} n! \prod_{k=1}^{n-1} x_k$$

D'autre part, on évalue l'égalité $P_n = \dfrac{(n-1)!}{2}\Big((X+1)^n - (X-1)^n\Big)$ en 0 :

$$P_n(0) = \frac{(n-1)!}{2}\big(1-(-1)^n\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)! & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

En combinant ces deux informations sur $P_n(0)$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n-1} x_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Partie IV : somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

18. (a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$x_{2n+1-k} = i\,\frac{\cos\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)} = i\,\frac{\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)} = i\,\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -x_k$$

(b) On sait que

$$P_{2n+1} = (2n+1)!\prod_{k=1}^{2n}(X - x_k)$$

Or, d'après la question précédente :

— les facteurs en $k=1$ et $k=2n=(2n+1)-1$ sont $(X-x_1)$ et $(X-x_{2n}) = (X+x_1)$. Leur produit fait donc $(X^2-x_1^2)$.

— les facteurs en $k=2$ et $k=2n-1=(2n+1)-2$ sont $(X-x_2)$ et $(X-x_{2n-1}) = (X+x_2)$. Leur produit fait donc $(X^2-x_2^2)$.

— etc...

— les facteurs en $k=n$ et $k=(2n+1)-n=n+1$ sont $(X-x_n)$ et $(X-x_{n+1}) = (X+x_n)$. Leur produit fait donc $(X^2-x_n^2)$.

En réorganisant les facteurs selon cette logique, on obtient donc :

$$P_{2n+1} = (2n+1)!\prod_{k=1}^{n}(X^2 - x_k^2)$$

Il suffit donc de poser $\boxed{R_n \mathrel{\hat{=}} (2n+1)!\prod_{k=1}^{n}(X - x_k^2)}$ pour avoir $P_{2n+1} = R_n(X^2)$.

19. (a) D'après la formule du binôme de Newton :

$$(X+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k$$

et

$$(X-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k(-1)^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^{k+1}X^k$$

Donc :

$$(X+1)^{2n+1}-(X-1)^{2n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\underbrace{(1+(-1)^k)}_{\hat{=}\,\varepsilon_k}X^k$$

Or, $\varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$. D'où :

$$P_{2n+1} \;=\; (2n)!\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^{2k}$$

D'où $\boxed{R_n = (2n)!\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^k}$.

Précision : on peut faire l'identification, car si deux polynômes R_n et $\tilde{R}_n$ vérifient $P_{2n+1} = R_n(X^2) = \tilde{R}_n(X^2)$, alors R_n et $\tilde{R}_n$ coïncident sur une infinité de valeurs, et sont donc égaux.

(b) Notons s_n le coefficient en X^{n-1} de R_n.

— D'après la forme factorisée de R_n, on a $s_n = (2n+1)! \times \left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

Or, $x_k^2 = i^2 \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Donc $s_n = (2n+1)! \times \sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

— D'après la forme développée de R_n, $s_n \;=\; (2n)!\binom{2n+1}{2(n-1)}$. Or :

$$\binom{2n+1}{2(n-1)} \;=\; \binom{2n+1}{3} \;=\; \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} \;=\; (2n+1)\,\frac{n(2n-1)}{3}$$

D'où $s_n \;=\; (2n+1)!\,\frac{n(2n-1)}{3}$.

En combinant ces deux calculs de s_n, on a : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}}$.

20. (a) Posons les fonctions $\begin{cases} u \,:\, t\mapsto \sin(t) \\ v \,:\, t\mapsto t \\ w \,:\, t\mapsto \tan(t)\end{cases}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

On a $\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = 1 \\ w'(t) = 1+\tan^2(t)\end{cases}$ donc $u'(t) \leq v'(t) \leq w'(t)$.

La fonction $v-u$ est donc croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et vaut 0 en 0. Elle est donc positive. D'où $u \leq v$. De même pour $v \leq w$.

Enfin, sin ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle et est strictement croissante, donc $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin(t)$.

(b) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a les implications :

$$\begin{aligned} \sin(t) \leq t \leq \tan(t) &\implies \frac{1}{\tan(t)} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin(t)} && \text{(passage à l'inverse sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\implies \frac{1}{\tan^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2(t)} && \text{(passage au carré sur } \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

D'une part, $\dfrac{1}{\tan^2(t)} = \text{cotan}^2(t)$, et d'autre part, on remarque que :

$$1 + \text{cotan}^2(t) \;=\; \frac{\sin^2(t)}{\sin^2(t)} + \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \;=\; \frac{1}{\sin^2(t)}$$

Les trois nombres étant strictement positifs, on obtient bien :

$$0 \;<\; \text{cotan}^2(t) \;\leq\; \frac{1}{t^2} \;\leq\; 1 + \text{cotan}^2(t)$$

(c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité appliquée à $t = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ donne :

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \;\leq\; \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \;\leq\; 1 + \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

On somme ces inégalités sur $k \in [\![1, n]\!]$ et on utilise le résultat de la question 19b :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \;\leq\; \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n \;\leq\; n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

c'est-à-dire :

$$A_n \;\leq\; S_n \;\leq\; B_n + A_n \qquad \text{avec} \quad A_n \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad B_n \mathrel{\hat{=}} \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}$$

(d) D'une part, on a par quotient $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\pi^2}{(2n)^2} = \dfrac{\pi^2}{4n}$, d'où $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2 \cdot n \cdot 2n}{3 \cdot (2n)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, d'où $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$.

Finalement, par théorème des gendarmes, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}}$.