DM n°3

À rendre le vendredi 8 octobre

Exercice 1. On note lorsque cela est défini $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction η est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire les variations de η.

   Indication : Pour montrer que la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_n$ *est décroissante à partir d'un certain rang, on pourra montrer que la fonction* $\phi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ *est décroissante sur un voisinage de l'infini.*
3. Calculer la limite en $+\infty$ de η.
4. Montrer que $\forall x > 1$, $\zeta(x) + \eta(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
5. En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$, en déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1^+.