DM n°2

À rendre le mardi 28 septembre

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 4f + 3Id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme et donner son inverse.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$.
   Indication : on pourra écrire $x = \dfrac{1}{2}(3x - f(x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - x)$
3. Donner la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.
4. En déduire la trace et le déterminant de f.

Solution :

1. Comme $f^2 - 4f + 3Id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors
   $f \circ (-\frac{1}{3}(f - 4Id_E)) = Id_E = (-\frac{1}{3}(f - 4Id_E)) \circ f$
   Donc f est bijectif d'inverse $f^{-1} = -\frac{1}{3}(f - 4Id_E)$
2. Soit $x \in \ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 3Id_E)$, alors
   $f(x) = x$ et $f(x) = 3x$, donc $3x = x$ soit $x = 0$ et la somme est directe.
   Soit $x \in E$, on peut écrire $x = \dfrac{1}{2}(3x - f(x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - x)$,
   Or $\dfrac{1}{2}(3x - f(x)) \in \ker(f - Id_E)$ car
   $$(f - Id_E)\left(\frac{1}{2}(3x - f(x))\right) = \frac{1}{2}\big(3f(x) - f^2(x) - 3x + f(x)\big) = -\frac{1}{2}\big(f^2(x) - f(x) + 3x\big) = 0$$
   et de même $\dfrac{1}{2}(f(x) - x) \in \ker(f - 3Id_E)$,
   Ainsi $x \in \ker(f - Id_E) + \ker(f - 3Id_E)$
   Donc a montré $E \subset \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$ et l'inclusion réciproque étant vraie (car chacun de ces noyaux est un sev de E, donc leur somme reste un sev de E), on a bien montré la décomposition en supplémentaire voulue.
3. On note $d_1 = \dim(\ker(f - Id_E))$ et $d_2 = \dim(\ker(f - Id_E))$.
   Remarque, par la question précédente $n = \dim(E) = d_1 + d_2$, et $\mathcal{M}at_B(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
   On pose $B = (e_1, \ldots, e_{d_1}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{d_2})$ une base adaptée à cette décomposition en supplémentaire.
   Ainsi, $\forall i, j,\ f(e_i) = e_i$ et $f(\mathbf{e}_j) = 3\mathbf{e}_j$ (car $e_i \in \ker(f - Id_E)$ et $\mathbf{e}_j \in \ker(f - 3Id_E)$)
   Dans cette base, la matrice de f est diagonale par blocs
   $$\mathcal{M}at_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_{d_1} & 0 \\ \hline 0 & 3I_{d_2} \end{array}\right)$$
4. On utilise la matrice de f dans cette base pour calculer sa trace et son déterminant.
   $Tr(f) = d_1 + 3d_3$ et $\det(f) = 3^{d_2}$.