DM n°2 pour les 5/2

À rendre le mardi 28 septembre

Définition :
Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans ce cas on définit son indice de nilpotence comme le plus petit entier p tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Noyaux itérés, Images itérées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul.
On note pour $k \in \mathbb{N}$:

$$N_k = \ker(u^k), \quad I_k = \operatorname{Im}(u^k).$$

1. **Étude d'un exemple**
   On se place sur $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par :

   $$u(e_1) = 0, \quad , u(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad u(e_3) = e_1.$$

   (a) Déterminer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k.
   On en donnera une base, sauf pour $k = 0$

   (b) Montrer que N_2 et I_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur N_2 est un nilpotent (on précisera l'ordre de nilpotence). Montrer que l'endomorphisme induit par u sur I_2 est une homothétie de rapport 2.

2. **Monotonie**
   On revient au cas général

   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont stables par u.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

   (c) On suppose que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ on ait $N_p = N_{p+1}$. Montrer qu'on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+k}$.

   (d) On suppose que pour un certain $q \in \mathbb{N}$ on ait $I_q = I_{q+1}$. Montrer qu'on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_q = I_{q+k}$.

3. **En dimension finie**
   On suppose ici E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k = \dim(N_k)$ et $i_k = \dim(I_k)$.

   (a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], N_k \neq N_{k+1}$;
   $\forall k \geq p, N_k = N_{k+1}$.
   Penser à utiliser la suite des dimensions (n_k).

   (b) Montrer de même qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, q-1]\!], I_k \neq I_{k+1}$;
   $\forall k \geq q, I_k = I_{k+1}$.

   (c) Montrer que $p = q \leq n$.

   (d) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

   (e) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur N_p est un endomorphisme nilpotent (préciser son indice de nilpotence).
   Montrer que l'endomorphisme induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p.

4. **Facultatif**.
On suppose toujours E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. La question 2(b) montre que la suite (i_k) est décroissante. Nous montrons maintenant que cette décroissance est de plus en plus lente. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = i_k - i_{k+1}$.
   (a) Montrer que $\delta_k = n_{k+1} - n_k$.
   (b) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$, puis déterminer $\dim(D_k)$.
   (c) Établir que $I_{k+1} = I_{k+2} + u(D_k)$.
   (d) En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (e) Application.
   Supposons que u soit un endomorphisme nilpotent avec $\dim(\ker(u)) = 1$.
   Déterminer l'indice de nilpotence de n.