# DM n°2 pour les 5/2

À rendre le mardi 28 septembre

---

**Définition :**
Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans ce cas on définit son indice de nilpotence comme le plus petit entier $p$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

## Noyaux itérés, Images itérées

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul.
On note pour $k \in \mathbb{N}$ :

$$N_k = \ker(u^k), \quad I_k = \mathrm{Im}(u^k).$$

1. **Étude d'un exemple**
   On se place sur $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

   $$u(e_1) = 0, \quad , u(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad u(e_3) = e_1.$$

   (a) Déterminer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $N_k$ et $I_k$.
   *On en donnera une base, sauf pour $k = 0$*

   (b) Montrer que $N_2$ et $I_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Montrer que l'endomorphisme induit par $u$ sur $N_2$ est un nilpotent (on précisera l'ordre de nilpotence). Montrer que l'endomorphisme induit par $u$ sur $I_2$ est une homothétie de rapport 2.

Solution :

(a) Pour $k = 0$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$ donc $N_0 = \{0_E\}$ et $I_0 = E$.
Pour $k = 1$, en posant $x = ae_1 + be_2 + ce_3$ on a

$$u(x) = 0_E \Leftrightarrow b(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + ce_1 = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0$$

et donc $N_1 = \ker(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$.
Or $u(e_2)$ et $u(e_3)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(u)$ et forment une famille libre (ils sont non colinéaires), donc $I_1 = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3, e_1)$.
Pour $k = 2$, on a

$$u^2(e_1) = 0_E, \quad u^2(e_2) = u(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = 5e_1 + 4e_2 + 6e_3, \quad u^2(e_3) = 0_E$$

Pour $x = ae_1 + be_2 + ce_3$ on a : $x \in \ker(u^2) \Leftrightarrow b(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) \Leftrightarrow b = 0$.
En effet $5e_1 + 4e_2 + 6e_3 \neq 0$, puisque $(e_1, e_2, e_3)$ est libre.
Ainsi $N_2 = \ker(u^2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Par théorème du rang $\dim(I_2) = 1$ or $u^2(e_2)$ est un vecteur non nul de $I_2$ donc $I_2 = \mathrm{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.
Pour $k = 3$, les calculs donnent

$$u^3(e_1) = 0_E, \quad u^3(e_2) = u(5e_1+4e_2+6e_3) = 4(e_1+2e_2+3e_3)+6e_1 = 2(5e_1+4e_2+6e_3), \quad u^3(e_3) = 0_E.$$

On a donc comme précédemment $N_3 = N_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $I_3 = I_2 = \mathrm{Vect}(5e_1+4e_2+6e_3)$.
Plus généralement on montre par récurrence que pour tout $k \geq 3$ :

$$u^k(e_1) = 0_E, \quad u^k(e_2) = 2^{k-2}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3), \quad u^k(e_3) = 0_E.$$

Par conséquent pour $k \geq 3$, $N_k = N_2$ et $I_k = I_2$.

(b) On a déjà $\dim(I_2) + \dim(N_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Soit $x \in N_2 \cap I_2$. Alors $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$. Or $N_2 = \{(a, b, c \in \mathbb{R}^3 \ : \ b = 0)\}$ donc $\alpha = 0$ et donc $x = 0_E$. Ainsi $N_2 \cap I_2 = \{0_E\}$.
$N_2$ et $I_2$ sont donc bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(c) • On a $N_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, avec $u(e_1) = 0_E$, $u(e_3) = e_1$. Donc $u(N_2) \subset N_2$ donc la restriction de $u$ à $N_2$ est bien un endomorphisme de $N_2$.
Il est nilpotent car $u^2(e_1) = u^2(e_3) = 0_E$.
Comme $u(e_3) = e_1 \neq 0_E$ son indice de nilpotence vaut 2.
• On a vu que $I_2 = \mathrm{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$ et que $u(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) = 2(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.
Donc la restriction de $u$ à $I_2$ est bien une homothétie de rapport 2.

2. **Monotonie**
On revient au cas général

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k$ et $I_k$ sont stables par $u$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

(c) On suppose que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ on ait $N_p = N_{p+1}$. Montrer qu'on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+k}$.

(d) On suppose que pour un certain $q \in \mathbb{N}$ on ait $I_q = I_{q+1}$. Montrer qu'on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_q = I_{q+k}$.

Solution :

(a) Soit $x \in N_k$. On a $u^k(x) = 0_E$ donc $u^k(u(x)) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$. Ainsi $u(x) \in N_k$.
On en déduit que $N_k$ est stable par $u$.
Soit $y \in I_k$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^k(x)$. Alors $u(y) = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in I_k$. On en déduit que $I_k$ est stable par $u$.

(b) Soit $x \in N_k$. On a $u^k(x) = 0_E$ donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in N_{k+1}$.
On en déduit que $N_k \subset N_{k+1}$.
Soit $y \in I_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$, mais alors $y = u^k(u(x)) \in I_k$.
On en déduit que $I_{k+1} \subset I_k$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrons que $N_{p+1} = N_{p+2}$.
L'inclusion $\subset$ a déjà été montrée. Soit $x \in N_{p+2}$. Alors $u^{p+2}(x) = u^{p+1}(u(x)) = 0_E$ donc $u(x) \in N_{p+1}$. Ainsi $u(x) \in N_p$ donc $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = 0_E$ et donc $x \in N_{p+1}$.
En réitérant, on montre par récurrence que $N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = N_{p+3} = \dots$.

(d) Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $I_q = I_{q+1}$. Montrons que $I_{q+1} = I_{q+2}$.
L'inclusion $\supset$ a déjà été montrée. Soit $y \in I_{q+1}$. Alors $y = u^{q+1}(x) = u(u^q(x))$ pour un certain $x \in E$. Or $u^q(x) \in I_q = I_{q+1}$ et donc $\exists t \in E : u^q(x) = u^{q+1}(t)$. Au final $y = u^{q+2}(t) \in I_{q+2}$.
En réitérant, on montre par récurrence que $I_q = I_{q+1} = I_{q+2} = I_{q+3} = \dots$.

3. **En dimension finie**
On suppose ici $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k = \dim(N_k)$ et $i_k = \dim(I_k)$.

(a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]\,, N_k \neq N_{k+1}$;
$\forall k \geq p, N_k = N_{k+1}$.
*Penser à utiliser la suite des dimensions* $(n_k)$.

(b) Montrer de même qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, q-1]\!]\,, I_k \neq I_{k+1}$;
$\forall k \geq q, I_k = I_{k+1}$.

(c) Montrer que $p = q \leq n$.

(d) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

(e) Montrer que l'endomorphisme induit par $u$ sur $N_p$ est un endomorphisme nilpotent (préciser son indice de nilpotence).
Montrer que l'endomorphisme induit par $u$ sur $I_p$ est un automorphisme de $I_p$.

Solution :

(a) La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, et elle est croissante d'après la question 2(b), avec $n_0 = 0$.
Elle ne peut pas être strictement croissante sinon on aurait $n_k \geq k$, contradiction avec $n_k \leq n$.
Soit donc $p$ le premier rang pour lequel $n_p = n_{p+1}$.
Par construction pour $k < p$, $\dim(N_k) \neq \dim(N_{k+1})$ donc $N_k \neq N_{k+1}$.
De plus l'égalité $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$ avec le fait que $N_p \subset N_{p+1}$, entraînent que $N_p = N_{p+1}$, et donc que $\forall k \geq p,\ N_k = N_{k+1}$ en vertu de la question 2(c).

(b) Le raisonnement est identique avec la suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante (avec $i_0 = n$).

(c) Le théorème du rang donne $rg(u^k) + \dim(\ker(u^k)) = n$, autrement dit : $i_k + n_k = n$.
On a donc l'équivalence :

$$n_k = n_{k+1} \Leftrightarrow n - i_k = n - i_{k+1} \Leftrightarrow i_k = i_{k+1}.$$

Ainsi par définition $p = q$.
Enfin on remarque que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]\,,\ n_{k+1} - n_k \geq 1$ ($n_{k+1}$ et $n_k$ sont des entiers).
Or $n_0 = 0$ donc $n_p = (n_1 - n_0) + (n_2 - n_1) + \cdots + (n_p - n_{p-1}) \geq p$. D'où l'inégalité $p \leq n$ puisque $n_p \leq n$ (car $N_p$ est un sev de $E$).

(d) On a déjà vu que le théorème du rang donne $\dim(E) = \dim(N_p) + \dim(I_p)$.
Soit $y \in N_p \cap I_p$. On a $u^p(y) = 0_E$ et $\exists x \in E\ :\ y = u^p(x)$.
Donc $u^{2p}(x) = 0_E$. Ainsi $x \in N_{2p}$ mais $N_{2p} = N_p$ donc $u^p(x) = y = 0_E$.
On en déduit que $N_p \cap I_p$ sont en somme directe, donc ils sont supplémentaires dans $E$.

(e) On sait déjà que $u$ induit des endomorphismes sur $N_p$ et $I_p$ (car ils sont stables par $u$).
• Soit $\tilde{u} = u_{N_p}$. Pour tout $x \in N_p$, $u^p(x) = \tilde{u}^p(x) = 0_E$ donc $\tilde{u}$ est nilpotent. Comme de plus $N_{p-1} \neq N_p$, il existe $x \in N_p$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ donc l'indice de nilpotence de $\tilde{u}$ vaut exactement $p$.
• Soit $\underline{u} = u_{I_p}$. On est en dimension finie donc il suffit de montrer que $\underline{u}$ est injective pour en déduire que c'est un automorphisme. Soit $x \in I_p$ tel que $\underline{u}(x) = u(x) = 0_E$. On a ainsi $x \in N_1 \cap I_p$. Or $N_1 \subset N_p$ donc $x \in N_p \cap I_p = \{0_E\}$. On a donc bien $x = 0_E$ et $\ker(\underline{u}) = \{0_E\}$.

4. **Pour aller plus loin**.
On suppose toujours $E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. La question 2(b) montre que la suite $(i_k)$ est décroissante. Nous montrons maintenant que cette décroissance est de plus en plus lente. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = i_k - i_{k+1}$.

(a) Montrer que $\delta_k = n_{k+1} - n_k$.

(b) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $D_k$ tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$, puis déterminer $\dim(D_k)$.

(c) Établir que $I_{k+1} = I_{k+2} + u(D_k)$.

(d) En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(e) Application.
Supposons que $u$ soit un endomorphisme nilpotent avec $\dim(\ker(u)) = 1$.
Déterminer l'indice de nilpotence de $n$.

Solution :

1. Le théorème du rang donne $i_k - i_{k+1} = (n - n_k) - (n - n_{k+1}) = n_{k+1} - n_k$.
2. On est en dimension finie donc $I_{k+1}$, comme tout sev de $I_k$, possède un supplémentaire $D_k$ dans $I_k$ par théorème.
   On a $\dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) + \dim(D_k)$ donc $\dim(D_k) = i_k - i_{k+1} = \delta_k$.
3. On a $I_{k+1} = u(I_k) = u(I_{k+1} + D_k) = u(I_{k+1}) + u(D_k) = I_{k+2} + u(D_k)$.
   Justifions la troisième égalité : de manière générale lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$, si $F$, $G$ sont deux sev de $E$ alors :
$$\begin{aligned} z \in f(F+G) &\Leftrightarrow \exists x \in F+G \ : \ z = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G \ : \ z = f(x_1 + x_2) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G \ : \ z = f(x_1) + f(x_2) \\ &\Leftrightarrow \in f(F) + f(G). \end{aligned}$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. En prenant les dimensions dans le résultat précédent on a :
$$\dim(I_{k+1}) = \dim(I_{k+2} + u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(D_k).$$
   Ainsi $\delta_{k+1} = i_{k+1} - i_{k+2} \leq \dim(D_k) = \delta_k$. Donc $(\delta_k)$ est décroissante.
5. Ici, $\delta_1 = n_1 - n_0 = n_1 = 1$ par hypothèse. $(\delta_k)$ est décroissante et $p$ est le premier rang pour lequel $\delta_p = 0$. Ainsi on a
$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{p-1} = 1 \\ \delta_p = \delta_{p+1} = \cdots = 0 \end{cases}$$
   Par conséquent
$$n = n_p = \sum_{k=0}^{p-1} (n_{k+1} - n_k) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_k = p$$