DM n°0

À rendre le 2 septembre 2021

---

1 Analyse

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}$ une fonction réelle.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 est $f(x) = -6 + \dfrac{x^2}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
3. En déduire l'équation de la tangente à f en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

2 Algèbre linéaire

On considère l'application
$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3y + 2z, -2x + 5y + 2z, 2x - 3y) \end{cases}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que la matrice de φ dans la base canonique est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer le déterminant de A. Montrer que φ est un automorphisme.
4. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, et en déduire l'inverse de A.
5. Trouver le terme général des suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + a_nX + b_n \text{ avec } Q_n \in \mathbb{R}[X].$$
Indication : après division euclidienne, on pourra trouver les racines réelles du polynôme $X^2 - 3X + 2$ et évaluer l'égalité en ces valeurs.
6. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On cherche à retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

7. Résoudre $(\mathcal{S}_1)$ le système linéaire $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
8. Résoudre $(\mathcal{S}_2)$ le système linéaire $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, montrer que le système d'inconnue $AX = \lambda X$ n'admet que la solution nulle.
On pourra montrer que la matrice $A - \lambda I_3,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est inversible
On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont C_1, C_2 et C_3.

10. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
11. Montrer que les colonnes C_1, C_2 et C_3 sont solutions d'un des systèmes $(\mathcal{S}_1)$ ou $(\mathcal{S}_2)$.
12. En déduire qu'il existe une matrice diagonale telle que $AP = PD$.
13. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une méthode pour retrouver la valeur de A^n.

    Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par récurrences par $u_0 = v_0 = 1 = -w_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 5v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - 3v_n \end{cases}$
14. Donner le terme général de la suite (u_n).
15. Pour quelles valeurs de (u_0, v_0, w_0) des suites définies par les relations de récurrence de la question précédente seraient constantes ?

3 Probabilités

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée une fois sur deux, et les autres faces ont la même chance d'être tirées. Les autres dés ne sont pas truqués. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On note X la variable aléatoire donnant le résultat du lancer de dé. Donner l'espérance et la variance de X

4 Algèbre bilinéaire

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2 \quad \psi(P, Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$. Donner une base orthonormale de F.
3. Donner une expression du projeté orthonormal sur F.
4. Calculer la distance de $R = 5X^3 - 24X^2 + 31X + 6$ à F.