Colle ATS : Programme pour la semaine 23 (du 07/04 au 11/04)

I.19. Séries entières

- Convergence dune série entière :
  - Série entière dune variable réelle ou complexe.
  - Lemme d'Abel.
  - Rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
  - Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.
  - les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

  Les étudiants doivent savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière dont l'absolue convergence peut être étudiée avec les règles sur les séries de terme général positif. La règle de d'Alembert relative aux séries entières est hors programme.
- Somme d'une série entière d'une variable réelle
  - Fonction somme, ensemble de définition. La fonction somme est continue sur linter-valle ouvert de convergence.
  - Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, et si $\sum a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. $x = -R$), la somme est continue sur l'intervalle $[0; R]$ (resp. $[-R; 0]$).
  - La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme. Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Fonctions développables en séries entières
  - Fonction développable en série entière au voisinage de 0. Unicité du développement en série entière. Lien avec la série de Taylor.
  - Développements en série entière usuels : $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$.

  Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière et pour déterminer les solutions d'une équation différentielle linéaire développables en série entière.
- Exponentielle complexe : $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

I.20. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

- Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$:
  Ici $n = 2$ ou $n = 3$, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique et de son produit scalaire canoniquement associé. Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Boules. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Partie ouverte, partie fermée.

- Continuité :
  Continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations. Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes. L'étude de la continuité dune fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
- Dérivées partielles :
  Dérivées partielles d'ordre 1. Gradient. Application de classe $\mathscr{C}^1$. Opérations.
  Dérivée de $t \longmapsto f(x(t), y(t))$.
  Dérivées partielles de $(u, v) \longmapsto h(f(u, v), g(u, v))$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables. Dérivées partielles dordre 2. Laplacien. Application de classe $\mathscr{C}^2$. Opérations. Théorème de Schwarz.